I Mühazirə

Vektor anlayışı, vektorlar üzərində xətti əməllər

1. Uc nöqtələrinin nizamı nəzərə alınan parçaya *istiqa-mətlənmiş parça* deyilir. Tutaq ki, uc nöqtələri A və B nöqtələ-rində olan parça verilmişdir. A-birinci nöqtə, B isə ikinci nöqtə olduqda A nöqtəsinə bu istiqamətlənmiş parçanın *başlanğıcı*, B nöqtəsinə isə *sonu* deyilir; bu halda $\overline{AB}$ yazılışından istifadə olunur. Başlanğıcı və sonu üst-üstə düşən istiqamətlənmiş parçaya *sıfır istiqamətlənmiş parça* deyilir. Tərifə görə ixtiyari A nöqtəsi üçün $\overline{AA}$ sıfır istiqamətlənmiş parçadır.

AB parçasının uzunluğu $\overline{AB}$ istiqamətlənmiş parçasının *uzunluğu* adlanır və $\left|\overline{AB}\right|$ kimi işarə olunur. Sıfır istiqamətlənmiş parçanın uzunluğunun sıfra bərabər olması nəzərdə tutulur.

Tutaq ki, A və B verilmiş iki nöqtədir. Onda $\overline{AB}$ və $\overline{BA}$ müxtəlif istiqamətlənmiş parçalardır. $\overline{AB}$ və $\overline{BA}$ parçala-rından hər biri digərinə *əks* olan istiqamətlənmiş parça adlanır.

AB və CD şüaları eyni (əks) istiqamətli olduqda deyirlər ki, $\overline{AB}$ və $\overline{CD}$ *eyni* (*əks*) *istiqamətlənmiş* parçalardır. Sıfır istiqa-mətlənmiş parçanın istənilən istiqamətlənmiş parça ilə eyni istiqamətli olması qəbul edilir.

Eyni istiqamətlənmiş və uzunluqları bərabər olan $\overline{AB}$ və $\overline{CD}$ parçalarına *ekvipolent parçalar* deyilir. Bu halda $\overline{AB} \overset{\omega}{=} \overline{CD}$ yazılışından istifadə olunur. Asanlıqla yoxlanılır ki $\overline{AB}$ və $\overline{CD}$ istiqamətlənmiş parçaları yalnız və yalnız AD və BC parçaları-nın orta nöqtələri üst-üstə düşdükdə ekvipolent olurlar.

Qeyd edək ki, ekvipolentlik münasibəti aşağıdakı şərtləri ödəyir:

1. ixtiyari istiqamətlənmiş $\overline{AB}$ parçası üçün $\overline{AB} \overset{\omega}{=} \overline{AB}$.
2. $\overline{AB} \overset{\omega}{=} \overline{CD} \Rightarrow \overline{CD} \overset{\omega}{=} \overline{AB}$.
3. $\left(\overline{AB} \overset{\omega}{=} \overline{CD} \text{ və } \overline{CD} \overset{\omega}{=} \overline{EF}\right) \Rightarrow \overline{AB} \overset{\omega}{=} \overline{EF}$.

Beləliklə, ekvipolentlik münasibəti fəzanın bütün istiqa-mətlənmiş parçalar çoxluğunda ekvivalentlik münasibətidir. Fəzanın bütün istiqamətlənmiş parçalar çoxluğunu W ilə işarə edək. $\overset{\omega}{=}$ ekvipolentlik münasibətinin hər bir ekvivalentlik sinifinə *vektor* (və ya *sərbəst vektor*) deyilir. BTərifə əsasən, vektor-$V = W/\overset{\omega}{=}$ faktor-çoxluğunun elementidir. Vektorlar üstünə ox işarəsi qoyulan hərflərlə işarə olunurlar: $\vec{a}, \vec{b}, \ldots$.

Beləliklə, vektor-elə istiqamətlənmiş parçalar çoxluğudur ki, onlardan ixtiyari ikisi ekvipolent parçalardır. Bu çoxluğun ən azı bir parçası sıfır istiqamətlənmiş parça olduqda vektor *sıfır vektor* adlanır və $\vec{0}$ kimi işarə olunur.

Tutaq ki, $\vec{a}-$verilmiş vektordur, yəni $\overset{\omega}{=}$ münasibətinin ekvivalentlik sinfidir. $\overline{AB} \in \vec{a}$ olduqda $\overline{AB}$ bütün ekvivalentlik sinfini, yəni $\vec{a}$ vektorunu təmsil edir. Bu halda $\vec{a}$ vektoru $\overrightarrow{AB}$ kimi işarə olunur. $\vec{a} = \vec{b}$ yazılışı göstərir ki, $\vec{a}$ çoxluğu $\vec{b}$ çoxluğu ilə üst-üstə düşür, yəni $\vec{a}$ və $\vec{b}$ müxtəlif cür işarələnmiş eyni vektordur.

Fəzanın ixtiyari $\vec{a}$ vektorunu və müəyyən O nöqtəsini götürək. İsbat edək ki, $\overrightarrow{OM} = \vec{a}$ şərtini ödəyən bir və yalnız bir M nöqtəsi vardır. Doğrudan da fərz edək ki,

$\overline{AB}\in\vec{a}$. OB parçasının C orta nöqtəsinə baxaq və C nöqtəsinə nəzərən A nöqtəsinə simmetrik olan M nöqtəsini götürək. İki istiqamət-lənmiş parçanın ekvipolentlik əlamətinə əsasən $\overline{OM}\overset{\omega}{=}\overline{AB}$, ona görə də $\overrightarrow{OM}=\vec{a}$. İndi isə göstərək ki, M - $\overrightarrow{OM}=\vec{a}$ şərtini ödəyən yeganə nöqtədir. Tutaq ki, $\overrightarrow{OM'}=\vec{a}$. Onda $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM'}$. Buradan istiqamətlənmiş parçaların ekvipolentlik əlamətinə əsasənalırıq: $\overrightarrow{OO}=\overrightarrow{MM'}\Rightarrow\left|\overline{OO}\right|=\left|\overline{MM'}\right|\Rightarrow 0=\left|\overline{MM'}\right|$, yəni M və M' nöqtələri üst-üstə düşürlər. M nöqtəsinin qurulmasını O nöqtəsindən $\vec{a}$ *vektorunun ayrılması* adlandırırlar.

$\vec{a}$ vektorunu təmsil edən ixtiyari istiqamətlənmiş parça l düz xəttinə paralel olduqda və ya onun üzərində yerləşdikdə deyirlər ki, $\vec{a}$ vektoru l *düz xəttinə paraleldir*. Sıfır vektorun istənilən düz xəttə paralel olması qəbul edilir.

Əgər $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarının paralel olduğu düz xətt vardırsa, bu halda deyirlər ki, $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları *kollineardırlar.* Aydındır ki, heç olmasa biri sıfır vektor olan iki vektor kollineardır. $\vec{a}\parallel\vec{b}$ yazılışı göstərir ki, $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları kollinear-dırlar.

Tutaq ki, $\vec{a}$ və $\vec{b}$ -kollinear vektorlardır və $\overline{AB}\in\vec{a},\overline{CD}\in\vec{b}$. $\overline{AB}$ və $\overline{CD}$ eyni istiqamətlənmiş parçalar olduqda $\vec{a}$ və $\vec{b}$ eyni istiqamətli, əks istiqamətlənmiş parçalar olduqda isə əks istiqamətli vektorlar adlanır. $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$ yazılışı $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarının eyni istiqamətli olmasını, $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$ yazılışı isə bu vektorların əks istiqamətli olmasını ifadə edir.

İxtiyari $\vec{a}$ vektoruna baxaq və hər hansı A nöqtəsindən $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ vektorunu ayıraq. $\overrightarrow{BA}$ vektoru $\vec{a}$ vektoruna *əks* olan vektor adlanır və $-\vec{a}$ kimi işarə olunur. $\overrightarrow{BA}$ vektoruna əks olan vektor $\overrightarrow{AB}$ vektoru olduğundan, $-(-\vec{a})=\vec{a}$. Sıfır vektora əks olan vektor sıfır vektorun özüdür.

Vektorun uzunluğu dedikdə onu təmsil edən hər hansı istiqamətlənmiş parçanın uzunluğu başa düşülür. Sıfır vektorun uzunluğu sıfra bərabərdir. $\vec{a}$ vektorunun uzunluğu $|\vec{a}|$ kimi işarə olunur. Uzunluğu vahidə bərabər olan vektora *vahid vektor* deyilir.

2. Vektorlar cəbrində vektorların toplanması əməli mü-hüm rol oynayır. İxtiyari $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarını götürək. Hər-hansı A nöqtəsindən $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ vektorunu, sonra isə B nöqtəsindən $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$ vektorunu ayıraq. $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ vektoru $\vec{a}$ *və* $\vec{b}$ *vektorları-nın cəmi* adlanır və belə işarə olunur: $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$.

Vektorların toplanmasının yuxarıda göstərilən qaydası *üçbucaq qaydası* adlanır. Bu qaydanı belə ifadə etmək olar: *ixtiyari* A,B *və* C *nöqtələri üçün*

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC} \qquad (1)$$

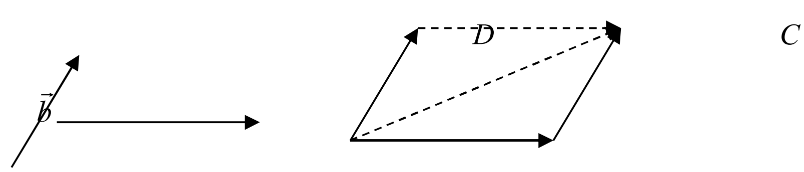
bərabərliyi doğrudur.

Üçbucaq qaydasını A,B,A nöqtələrinə tətbiq etməklə alırıq: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}$. Analoji olaraq müəyyən edirik ki, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB}=\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}$. Beləliklə, ixtiyari $\vec{a}$ vektoru üçün:

$$\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}, \qquad (2)$$

$$\vec{a}+\vec{0}=\vec{a} \text{ və } \vec{0}+\vec{a}=\vec{a}. \qquad (3)$$

Kollinear olmayan vektorların toplanması üçün digər qaydadan-*paraleloqram qadasından* istifadə oluna bilər. Şəkil 1-də $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarının $\vec{c}$ cəminin bu qayda ilə qurulması göstərilmişdir.



$\vec{a}$ A B

Şəkil 1

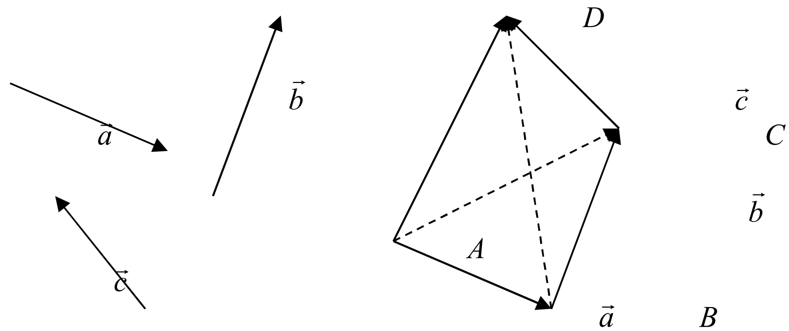
Teorem 1. *İxtiyari $\vec{a}, \vec{b}$ və $\vec{c}$ vektorları üçün aşağıdakı bərabərliklər doğrudur:*

1^0. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (yerdəyişmə xassəsi və ya kommutativ-lik xassəsi).

2^0. $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ qruplaşdırma xassəsi və ya assosiativlik xassəsi).

İsbatı. 1^0. Tutaq ki, $\vec{a}$ və $\vec{b}$ - ixtiyari vektorlardır. Hər hansı A nöqtəsindən $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$ vektorlarını, sonra isə B nöqtəsindən $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$ vektorunu ayıraq (şək.1). Qurmaya əsasən, $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC},$ ona görə də $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC},$ yəni $\overrightarrow{DC}=\vec{a}.$ Üçbucaq qaydasına görə, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ və $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}$. Bu isə o deməkdir ki, $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AC}, \vec{b}+\vec{c}=\overrightarrow{AC}.$ Beləliklə, $\vec{a}+\vec{b}$ və $\vec{b}+\vec{c}$ eyni vektordur.

2^0. Tutaq ki, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}-$ixtiyari vektorlardır. Hər hansı A n.qtəsini götürək və ardıcıl olaraq, $\overrightarrow{AB}=\vec{a}, \overrightarrow{BC}=\vec{b}, \overrightarrow{CD}=\vec{c}$ vektorlarını ayıraq (şək.2). Üçbucaq qaydasına görə, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}.$ Bu isə o deməkdir ki, $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\overrightarrow{AD}.$ Digər tərəfdən, $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD},$ ona görə də $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=\overrightarrow{AD}.$ Beləliklə, $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$ və $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ eyni vektordur. ■



$\overrightarrow{AD}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$

Şəkil 2

$\vec{p}=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$ vektoru $\vec{a}, \vec{b}$ və $\vec{c}$ vektorlarının cəmi qəbul olunur. Teorem 1-ə əsasən, $\vec{p}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$. Analoji qayda ilə ixtiyari $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n (n>3)$ vektorlarının cəmi təyin oluna bilər.

$\vec{a}$ və $\vec{b}$ *vektorlarının fərqi*

$$\vec{b}+\vec{x}=\vec{a}$$

bərabərliyini ödəyən $\vec{x}$ vektoruna deyilir. Göstərmək olur ki, ixtiyari iki vektorun fərqi vardır və birqiymətli təyin olunur.

3. $\vec{a}$ *vektorunun* λ *həqiqi ədədinə hasili* aşağıdakı şərtləri ödəyən $\vec{p}$ vektoruna deyilir:

a) $|\vec{p}|=|\lambda|\cdot|\vec{a}|,$ burada $|\lambda|-\lambda$ ədədinin mütləq qiymətidir.

b) $\lambda \geq 0$ olduqda $\vec{p}\uparrow\uparrow\vec{a}$ və $\lambda<0$ olduqda $\vec{p}\uparrow\downarrow\vec{a}$.

$\vec{p}$ vektorunu $\lambda\vec{a}$ kimi işarə edirlər.

a) şərtindən alınır ki, yalnız və yalnız $\lambda = 0$ və ya $\vec{a} = \vec{0}$ olduqda $\vec{p} = \vec{0}$. Beləliklə, $\lambda\vec{0} = \vec{0}, \quad 0\vec{a} = \vec{0}.$

Teorem 2. *İxtiyari λ, μ ədədləri və $\vec{a}, \vec{b}$ vektorları üçün aşağıdakı bərabərliklər doğrudur:*

1^0. $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$.

2^0. $\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}.$

3^0. $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}.$

4^0. $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}.$

İsbatı. 1^0 xassəsinin doğruluğu vektorun ədədə hasilinin tərifindən bilavasitə alınır. λ, μ ədədlərindən heç olmasa biri sıfra bərabər olduqda və ya $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarından heç olmasa biri sıfır vektor olduqda digər xassələrin də doğruluğu aşkardır. Ona görə də $\lambda \neq 0, \mu \neq 0, \vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$ halında $2^0, 3^0$ və 4^0 xassələri-nin doğruluğunu əsaslandırmaq yetərlidir.

2^0. Tutaq ki, $\vec{p} = \lambda(\mu\vec{a}), \vec{q} = (\lambda\mu)\vec{a}.$ Vektorun ədədə hasi-linin tərifinə görə, $|\vec{p}| = |\lambda||\mu\vec{a}| = |\lambda||\mu||\vec{a}|, \quad |\vec{q}| = |\lambda\mu||\vec{a}| = |\lambda||\mu||\vec{a}|.$

Buradan alınır ki, $|\vec{p}| = |\vec{q}|$. Göstərək ki, $\vec{p} \uparrow\uparrow \vec{q}$. $\lambda\mu > 0$ və $\lambda\mu < 0$ mümkün halları vardır. Birinci hala baxaq. $\vec{p} = \lambda(\mu\vec{a})$ olduğundan, həmçinin λ və μ eyni işarəli ədədlər olduqlarından $\vec{p}$ və $\vec{a}$ vektorları eyni istiqamətlidirlər. Lakin $\vec{q} = (\lambda\mu)\vec{a}$ və $\vec{a}$ vektorlarının da istiqamətləri eynidir, beləliklə, $\vec{p} \uparrow\uparrow \vec{q}$. Analoji qada ilə $\lambda\mu < 0$ halında da müəyyən edirik ki, $\vec{p} \uparrow\uparrow \vec{q}$. Buradan $|\vec{p}| = |\vec{q}|$ bərabərliyinə əsasən, $\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$ olması alınır.

3^0. Hər hansı A nöqtəsindən $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ vektorunu, sonra isə B nöqtəsindən $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ vektorunu ayıraq. Üçbucaq qaydasına əsasən, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$, yəni $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$. Əmsalı λ ədədi olan və mərkəzi AB, BC və AC düz xəttlərinə oid olmayan müəyyən O nöqtəsində yerləşən homotetiyaya baxaq. Tutaq ki, A', B' və C' - A, B və C nöqtələrinin obrazlarıdır.Onda $\overrightarrow{A'B'} = \lambda\overrightarrow{AB}, \ \overrightarrow{B'C'} = \lambda\overrightarrow{BC}, \ \overrightarrow{A'C'} = \lambda\overrightarrow{AC}$ və ya $\overrightarrow{A'B'} = \lambda\vec{a}, \ \overrightarrow{B'C'} = \lambda\vec{b},$ $\overrightarrow{A'C'} = \lambda(\vec{a} + \vec{b})$. Digər tərəfdən, üçbucaq qaydasına əsasən, $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'C'}$, yəni $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}.$

4^0. İki mümkün hala baxmaq lazımdır: a) $\lambda\mu > 0$ və b) $\lambda\mu < 0$.

a) $\lambda\mu > 0$. Müəyyən A nöqtəsindən $\overrightarrow{AB} = \lambda\vec{a}$ vektorunu, sonra isə B nöqtəsindən $\overrightarrow{BC} = \mu\vec{a}$ vektorunu ayıraq. Onda $AB = |\lambda||\vec{a}|, BC = |\mu||\vec{a}|$. $\lambda\mu > 0$ olduğuna görə, $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{BC}$, yəni B nöqtəsi A və C nöqtələri arasında yerləşir. Beləliklə, $AC = AB + BC$ və ya $AC = |\lambda||\vec{a}| + |\mu||\vec{a}|$. Lakin λ və μ eyni işarəli ədədlərdir, ona görə də $|\lambda| + |\mu| = |\lambda + \mu|$. Bu isə göstərir ki,

$$AC = |\lambda + \mu||\vec{a}|. \tag{4}$$

$\lambda > 0, \mu > 0$ olduqda $\overrightarrow{AC}$ və $\vec{a}$ vektorları eyni istiqamətli, $\lambda < 0, \mu < 0$, yəni $\lambda + \mu < 0$ olduqda isə əks istiqamətli vektor-lardır. Ona görə də (4) bərabərliyinə əsasən alarıq: $\overrightarrow{AC} = (\lambda + \mu)\vec{a}$. Digər tərəfdən, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}.$ Beləliklə, $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}.$

$\lambda\mu < 0$ halında da 4^0 bərabərliyinin doğruluğu analoji qayda ilə əsaslandırılı■

II Mühazirə

Vektorların xətti asılılığı, xassələri. Vektor fəza. Vazis, vektorun koordinatları.

1. Əvvəlcə vektorların kollinearlığına dair aşağıdakı teoremi isbat edək:

Teorem 1. *Əgər $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları kollineardırlarsa və $\vec{a} \neq \vec{0}$ şərti ödənilirsə, onda elə yeganə α ədədi vardır ki,*

$$\vec{b} = \alpha\vec{a}. \tag{1}$$

İsbatı. İlk növbədə (1) bərabərliyini ödəyən α ədədinin varlığını əsaslandıraq. $\vec{a} \| \vec{b}$ olduğundan, ya $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, ya da $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$. Birinci halda $\alpha = \dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$, ikinci halda isə $\alpha = -\dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$ qəbul edək. Vektorun fdədə vurulması əməlinin tərifinə əsasən, hər iki halda (1) bərabərliyini alırıq.

İndi isə isbat edək ki, (1) şərtini ödəyən α ədədi birqiymətli təyin olunur. Fərz edək ki, α_1 elə bir həqiqi ədəddir ki, $\vec{b} = \alpha_1\vec{a}$. Bu bərabərlikdən və (1) bərabərdiyindən alınır ki, $\alpha\vec{a} = \alpha_1\vec{a}$ və ya $(\alpha - \alpha_1)\vec{a} = \vec{0}$. $\vec{a} \neq \vec{0}$ olduğundan, $\alpha - \alpha_1 = 0$ və y■ $\alpha = \alpha_1$.

$\vec{a}$ vektoru σ müstəvisi üzərində yerləşən müəyyən düz xəttə paralel olduqda deyirlər ki, *$\vec{a}$ vektoru σ müstəvisinə para-leldir.* Aşkardır ki, σ müstəvisinə paralel olan $\vec{a}$ vektoru σ müstəvisinə paralel olan istənilən müstəviyə də paraleldir.

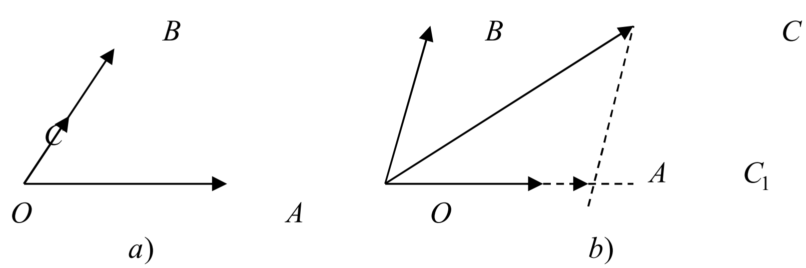
Əgər $\vec{a}, \vec{b}$ və $\vec{c}$ vektorlarının paralel olduqları müstəvi vardırsa, bu halda deyirlər ki, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorları *komplanardırlar.* Qeyd edək ki, $\vec{a}, \vec{b}$ və $\vec{c}$ vektorlarından heç olmasa biri sıfır vektor olduqda bu vektorlar komplanardırlar. Doğrudan da, müəyyənlik üçün, məsələn, $\vec{c} = \vec{0}$ olduğunu fərz edək. Fəzanın hər hansı O nöqtəsindən $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \overrightarrow{OC} = \vec{c}$ vektorlarını ayıraq. O, A və B nöqtələrindən $\vec{a}, \vec{b}$ və $\vec{c}$ vektorlarına paralel olan müstəvi keçdiyindən bu vektorlar komplanardırlar.

Komplanar vektorlara dair teoremi isbat edək:

Teorem 2. Əgər $\vec{a}, \vec{b}$ və $\vec{c}$ vektorları komplanardırsa və $\vec{a}, \vec{b}$ -kollinear olmayan vektorlardırsa, onda elə yeganə α və β ədədləri vardır ki,

$$\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}. \tag{2}$$

İsbatı. Əvvəlcə (2) bərabərliyini ödəyən α və β əgədlərinin varlığını isbat edək. Müəyyən O nöqtəsindən $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \overrightarrow{OC} = \vec{c}$ vektorlarını ayıraq. Bu vektorlar komplanar olduqlarından O, A, B, C nöqtələri bir müstəvi üzərində yerləşirlər, eyni zamanda O, A, B nöqtələri bir düz xətt üzərində yerləşmirlər ($\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ kollinear olmayan vektorlardır).



a) *b)*

Şəkil 5

C nöqtəsi OB düz xətti üzərində yerləşdikdə (şək.5, a), $\overrightarrow{OB}=\vec{b}, \overrightarrow{OC}=\vec{c}$ vektorları kollinear olurlar. Bu halda teorem 1-ə əsasən $\vec{c}=\beta\vec{b}$ və ya $\vec{c}=0\cdot\vec{a}+\beta\vec{b}$ şərtini ödəyən β ədədi vardır, yəni (2) bərabərliyi ödənilir. C nöqtəsinin OB düz xətti üzərində yerləşmədiyi hala baxaq (şək. 5, b). OB düz xəttinə CC_1 paralel düz xəttini keçirək, burada $C_1 - OA$ düz xəttinin nöqtəsidir. Üçbucaq qaydasına əsasən, $\overrightarrow{OC_1}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CC_1}$. Lakin $\overrightarrow{OC_1} \| \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{C_1C} \| \overrightarrow{OB}$, ona görə də $\overrightarrow{OC_1}=\alpha\vec{a}, \overrightarrow{C_1C}=\beta\vec{b}$ bərabərliklərini ödəyən α və β ədədləri vardır. Beləliklə, $\overrightarrow{OC}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$, yəni (2) bərabərliyi ödənilir.

İndi isə (2) bərabərliyini ödəyən α və β ədədlərinin birqiymətli təyin olunduğunu isbat edək. Tutaq ki, α_1 və β_1 elə ədədlərdirlər ki, $\vec{c}=\alpha_1\vec{a}+\beta_1\vec{b}$. Bu bərabərlikdən və (2) bərabərliyindən alarıq: $(\alpha-\alpha_1)\vec{a}+(\beta-\beta_1)\vec{b}=\vec{0}$. Aşkardır ki, $\alpha-\alpha_1=0,\ \beta-\beta_1=0$. Doğrudan da, məsələn, $\alpha-\alpha_1=0$ oldu-ğunu fərz etsək, sonuncu vektor bərabərliyindən alarıq: $\vec{a}=\dfrac{\beta_1-\beta}{\alpha-\alpha_1}\vec{b}$, bu isə $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları kollinear olmadığına görə mümkün deyil.■

2. Tutaq ki,

$$\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_n \tag{3}$$

vektorlar sistemi və n sayda $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ həqiqi ədədləri veril-mişdir. $\vec{b}=\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+\cdots+\alpha_n\vec{a}_n$ vektoru verilmiş $\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_n$ vektorlarının *xətti kombinasiyası* adlanır. Həmçinin deyirlər ki, $\vec{b}$ vektoru $\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_n$ vektorları ilə *xətti ifadə olunur*.

Əgər

$$\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+\cdots+\alpha_n\vec{a}_n=\vec{0} \tag{4}$$

bərabərliyini ödəyən və heç olmasa biri sıfırdan fərqli olan $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ ədədləri vardırsa, o halda deyirlər ki, (3) vektorlar sistemi *xətti asılıdır*. (4) bərabərliyi yalnız $\alpha_1=\alpha_2=...=\alpha_n=0$ olduqda ödənildiyi halda isə $\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_n$ *xətti asılı olmayan* vektorlar sistemi adlanır.

$n=1$ halında bir vektordan ibarət sistem alınır. Aşkardır ki, belə sistem yalnız sistemin vektoru sıfır vektor olduqda xətti asılıdır.

Xətti asılı olan vektorlar sisteminin bəzi xassələrini nəzər-dən keçirək.

1^0. $n>1$ *halında* (3) *vektorlar sisteminin xətti asılı olması üçün zəruri və kafi şərt bu vektorlardan heç olmasa birinin sistemin qalan vektorlarının xətti kombinasiyası olmasıdır.*

Tutaq ki, (3) vektorlar sistemi xətti asılıdır. Bu o deməkdir ki, (4) bərabərliyi ödənilir və $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ ədədlərindən heç olmasa biri sıfırdan fərqlidir. Müəyyənlik üçün $\alpha_k\neq 0$ ($k-1,2,..,n$ ədədlərindən biridir) olduğunu fərz edək. (4) bəra-bərliyini

$$\vec{a}_k=-\frac{\alpha_1}{\alpha_k}\vec{a}_1-\frac{\alpha_2}{\alpha_k}\vec{a}_2-\cdots-\frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k}\vec{a}_{k-1}-\frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k}\vec{a}_{k+1}-\cdots-\frac{\alpha_n}{\alpha_k}\vec{a}_n$$

şəklində yazaq. Buradan görünür ki, $\vec{a}_k$ vektoru (3) sisteminin qalan vektorlarının xətti kombinasiyasıdır.

Tərsinə, tutaq ki, (3) sistemində $\vec{a}_k$ vektoru qalan vektor-ların xətti kombinasiyasıdır:

$$\vec{a}_k=\beta_1\vec{a}_1+\cdots+\beta_{k-1}\vec{a}_{k-1}+\beta_{k+1}\vec{a}_{k+1}+\cdots+\beta_n\vec{a}_n.$$

Bu bərabərliyi aşağıdakı kimi yazaq:

$$\beta_1\vec{a}_1+\cdots+\beta_{k-1}\vec{a}_{k-1}+(-1)\vec{a}_k+\beta_{k+1}\vec{a}_{k+1}+\cdots+\beta_n\vec{a}_n=\vec{0}.$$

Sonuncu bərabərlik (3) vektorlar sisteminin xətti asılı olduğunu göstərir ($\vec{a}_k$ vektorunun əmsalı sıfırdan fərqlidir).■

2^0. *Alt sistemi xətti asılı olan vektorlar sistemi xətti asılıdır.*

Tutaq ki, (3) vektorlar sistemi verilmişdir və $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_l$ $(l < n)$ vektorlar sistemi xətti asılıdır. Deməli, heç olmasa biri sıfırdan fərqli olan elə $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_l$ ədədləri vardır ki,

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \cdots + \alpha_l\vec{a}_l = \vec{0}.$$

Bu bərabərliyi aşağıdakı kimi də yaza bilərik:

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \cdots + \alpha_l\vec{a}_l + 0\vec{a}_{l+1} + \cdots 0\vec{a}_n = \vec{0}.$$

Beləliklə , (3) vektorlar sistemi də xətti asılıdır.■

3^0. *Xətti asılı olmayan vektorlar sistemində sıfır vektor yoxdur.*

4^0. *Xətti asılı olmayan vektorlar sisteminin istənilən alt sistemi xətti asılı deyil.*

3^0 xassəsinin doğruluğu 2^0 xassəsindən bilavasitə alınır, 4^0 xassəsinin doğruluğu isə əksini fərz etmə ilə asanlıqla əsaslandırılır.

3. Vektorların xətti asılılığının həndəsi mahiyyətini izah edən teoremləri qeyd edək.

Teorem 3. *$\vec{a}, \vec{b}$ vektorlar sistemi yalnız və yalnız bu vektorlar kollinear olduqda xətti asılıdır.*

İsbatı. Tutaq ki, $\vec{a}, \vec{b}$ vektorlar sistemi xətti asılıdır. 1^0 xassəsinə görə bu vektorlardan heç olmasa biri digəri ilə xətti ifadə olunur. Müəyyənlik üçün $\vec{b} = \alpha\vec{a}$ olduğunu qəbul edək. Buradan görünür ki, $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları kollineardırlar.

Tərsinə, tutaq ki, $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları kollineardırlar. $\vec{a} = \vec{0}$ olduqda 3^0 xassəsinə görə $\vec{a}, \vec{b}$ vektorlar sistemi xətti asılıdır. $\vec{a} \neq \vec{0}$ olduqda isə teorem 1-ə əsasən, $\vec{b} = \alpha\vec{a}$. Buradan $\alpha\vec{a} + (-1)\vec{b} = \vec{0}$ bərabərliyi alınır, yəni $\vec{a}, \vec{b}$ vektorlar sistemi xətti asılıdır. ■

Teorem 4. *$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlar sistemi yalnız və yalnız bu vektorlar komplanar olduqda xətti asılıdır.*

İsbatı. Tutaq ki, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlar sistemi xətti asılıdır:

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0},$$

burada α, β, γ əmsallarından heç olmasa biri sıfırdan fərqlidir. Göstərək ki, $\vec{a}, \vec{b}$ və $\vec{c}$ vektorları komplanardırlar. α, β və ya γ əmsallarından heç olmasa biri sıfra bərabər olduqda hökmün doğruluğu aşkardır. Doğrudan da, məsələn, $\gamma = 0$ olursa, onda $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{0}$ və teorem 3-ə görə $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları kollinear-dırlar. Bu isə $\vec{a}, \vec{b}$ və $\vec{c}$ vektorlarının komplanar olması deməkdir. $\alpha \neq 0, \beta \neq 0, \gamma \neq 0$ halına baxaq.

Müəyyən O nöqtəsindən $\overrightarrow{OA} = \alpha\vec{a}$ vektorunu, sonra isə A nöqtəsindən $\overrightarrow{AB} = \beta\vec{b}$ vektorunu ayıraq. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$ olduğundan, $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \overrightarrow{OB}.$ Digər tərəfdən, $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = -\gamma\vec{c}$, ona görə də $\overrightarrow{OB} = -\gamma\vec{c}$. O, A və B nöqtələrindən σ müstəvisi keçir. $\alpha \neq 0, \beta \neq 0, \gamma \neq 0$ olduğundan, $\overrightarrow{OA} = \alpha\vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \beta\vec{b}$ və $\overrightarrow{OB} = -\gamma\vec{c}$ bərabərliklərindən alınır ki, $\vec{a}, \vec{b}$ və $\vec{c}$ vektorları σ müstəvisinə paraleldirlər və ona görə də komplanardırlar.

Tərsinə, tutaq ki, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorları komplanardırlar. Əgər $\vec{a} \| \vec{b}$ olarsa, onda teorem 3-ə əsasən, $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları xətti asılıdırlar və 2^0 xassəsinə görə $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlar sistemi xətti asılıdır. $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları kollinear olmadıqda isə teorem 2-yə əsasən, $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$. Buradan 1^0 xassəsinə əsasən $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektor-lar sisteminin xətti asılı olması alınır. ■

III Mühazirə

Müstəvi üzərində afin koordinat sistemi. Parçanın verilən nisbətdə bölünməsi

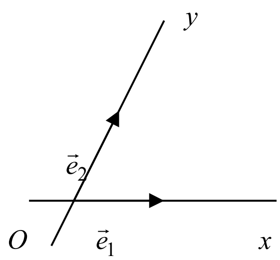
1. Tutaq ki, $V-$üç ölçülü vektor fəzadır, L isə bu fəzanın vektorlarının müəyyən boş olmayan çoxluğudur. Aşağıdakı şərtlər ödənildikdə L çoxluğu V fəzasının *vektor alt fəzası* adlanır:

1^0. Əgər $\vec{a}\in L$ və $\vec{b}\in L$ olarsa, onda $\vec{a}+\vec{b}\in L$.

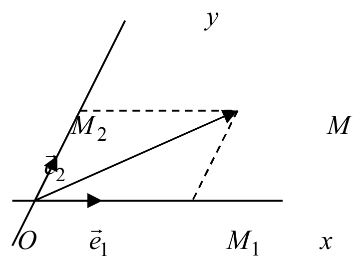
2^0. Əgər $\vec{a}\in L$ olarsa, onda istənilən həqiqi α ədədi üçün $\alpha\vec{a}\in L.$

L *vektor alt fəzasının bazisi* xətti asılı olmayan vektorların elə nizamlanmış sisteminə deyilir ki, L vektor alt fəzasının istənilən vektoru bu sistemin vektorlarının xətti kombinasiyası olsun. İsbat etmək olur ki, vektor alt fəzasının bütün bazisləri eyni sayda vektorlara malikdirlər. Bazis vektorlarının sayına *vektor alt fəzasının bazisi* deyilir. Kollinear olmayan $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları və ixtiyari α və β həqiqi ədədləri üçün $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$ şəklində olan bütün vektorların $L(\vec{a},\vec{b})$ çoxluğu iki ölçülü vektor alt fəzasını əmələ gətirir. Qeyd edək ki, $L(\vec{a},\vec{b})$ vektor alt fəzası-nın istənilən vektoru $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarının paralel olduqları müstəviyə paraleldir.

Tutaq ki, müstəvi üzərində hər hansı O nöqtəsi və bu müstəviyə paralel olan vektorların L vektor alt fəzasının ixtiyari $\vec{e}_1,\vec{e}_2$ bazisi verilmişdir. O nöqtəsindən və $\vec{e}_1,\vec{e}_2$ bazisindən ibarət olan üçlüyə müstəvi üzərində *afin koordinat sistemi* deyilir və $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ və ya $(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ simvolu ilə işarə olunur (şək. 9). O nöqtəsi *koordinat başlanğıcı*, $\vec{e}_1$ və $\vec{e}_2-$*koordinat vektorları* ($\vec{e}_1-$ birinci koordinat vektoru, $\vec{e}_2-$ikinci koordinat vektoru) adlanır. Koor-dinat başlanğıcından keçən və koordinat vektorlarına paralel olan istiqamətlənmiş düz xəttlərə *koordinat oxları* deyilir. Üzərindəki müsbət istiqamətin $\vec{e}_1$ vektoru ilə təyin olunduğu koordinat oxu *absis oxu* adlanır və Ox kimi işarə edilir. Digər ox-*ordinat oxu* adlanır və Oy kimi işarə olunur (şək.9). Ona görə də



Şəkil 9



Şəkil 10

$O\vec{e}_1\vec{e}_2$ koordinat sistemini Oxy kimi də işarə edirlər.

2. Tutaq ki, $O\vec{e}_1\vec{e}_2$-afin koordinat sistemidir, M isə müs-təvinin ixtiyari noqtəsidir (şək.10). $\overrightarrow{OM}$ vektoru M nöqtəsinin O nöqtəsinə nəzərən *radius-vektoru* adlanır. $\overrightarrow{OM}$ vektorunun $\vec{e}_1,\vec{e}_2$ bazisindəki x və y koordinatlarına M nöqtəsinin $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ koordinat sistemindəki *koordinatları* deyilir. x ədədi M nöqtə-sinin *absisi,* y ədədi isə *ordinatı* adlanır və $M(x,y)$ yazılır. Beləliklə, M nöqtəsinin $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ sistemindəki koordinatları elə x və y ədədlərinə deyilir ki,

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2. \tag{1}$$

Seçilmiş koordinat sistemində müstəvinin hər bir M nöqtəsi (x,y) koordinatlarına malik olur və əgər $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$ müxtə-lif nöqtələrdirlərsə, onda (x_1,y_1) və (x_2,y_2) cütləri üst-üstə düş-mürlər (yəni $x_1 \neq x_2$ və $y_1 \neq y_2$ bərabərsizliklərindən heç olmasa biri ödənilir). Tərsinə, ədədlərin hər bir nizamlanmış (x,y) cütü üçün verilmiş koordinatları olan nöqtəni göstərmək mümkündür. Doğrudan da, əgər O nöqtəsindən $x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$ vektorunu ayırsaq, müstəvinin müəyyən M nöqtəsi üçün $\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$ bərabərliyi ödənilər. Aşkardır ki, (x,y) M nöqtəsinin koordinatları olar. Beləliklə, əgər müstəvi üzərində afin koordinat sistemi verilmişdirsə, onda müstəvinin nöqtələri ilə həqiqi ədədlərin (x,y) nizamlanmış cütləri arasında, yəni müstəvinin nöqtələri ilə R^2 çoxluğunun elementləri arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq təyin olunur, burada $R^2 = R \times R -$ həqiqi ədədlər çoxluğunun dekart kvadratıdır.

Tutaq ki, afin koordinat sistemində $A(x_1,y_1)$ və $B(x_2,y_2)$ nöqtələri verilmişdir. $\overrightarrow{AB}$ vektorunun koordinatlarını təyin edək. Aydındır ki, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$. $\overrightarrow{OA}$ və $\overrightarrow{OB}$ vektorlarının A və B nöqtələrinin radius-vektorları kimi $\overrightarrow{OA}(x_1,y_1)$ və $\overrightarrow{OB}(x_2,y_2)$ koordinatları vardır. Beləliklə, $\overrightarrow{AB}$ vektoru $\overrightarrow{OB}$ və $\overrightarrow{OA}$ vektor-larının fərq vektoru olaraq

$$\overrightarrow{AB}(x_2 - x_1, y_2 - y_1) \tag{2}$$

koordinatlarına malikdir, yəni *vektorun hər bir koordinatı vektorun sonunun və başlanğıcının uyğun koordinatlarının fərqinə bərabərdir.*

3. Tutaq ki, M_1 və M_2 müstəvinin hər hansı iki nöqtəsi-dir, λ isə $\lambda \neq -1$ şərtini ödəyən müəyyən ədəddir.

$$\overrightarrow{M_1M} = \lambda\overrightarrow{MM_2} \tag{4}$$

şərti ödənildikdə deyirlər ki, M nöqtəsi $\overline{M_1M_2}$ (istiqamətlənmiş) parçasını λ *nisbətində bölür*.

(4) bərabərliyindən müəyyən edirik ki, $\overrightarrow{M_1M}$ və $\overrightarrow{MM_2}$ vektorları kollineardırlar. Bu isə o deməkdir ki, M nöqtəsi M_1M_2 düz xətti üzərində yerləşir. $\lambda > 0$ olduqda, yəni $\overrightarrow{M_1M}$ və $\overrightarrow{MM_2}$ vektorları eyni istiqamətli olduqda M nöqtəsi M_1M_2 parçasına aid olur. $\lambda < 0$ şərti ödənildikdə isə M_1M_2 parçasından kənarda yerləşir.

Müstəvi üzərində $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ afin koordinat sistemini daxil edək və fərz edək ki, $\overline{M_1M_2}$ parçasının başlanğıcının və sonunun $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$ koordinatları vardır. M_1M_2 parçasını λ nisbətində bölən $M(x,y)$ nöqtəsinin koordinatlarını təyin edək. Aydındır ki, $\overrightarrow{M_1M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{MM_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM}$, ona görə də (4) bərabərliyini belə yazmaq olar: $\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_1} = \lambda\left(\overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM}\right)$. Buradan alırıq: $(1+\lambda)\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \lambda\overrightarrow{OM_2}$. $\lambda + 1 \neq 0$ olduğundan,

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OM_1} + \lambda\overrightarrow{OM_2}}{1+\lambda} = \frac{1}{1+\lambda}\overrightarrow{OM_1} + \frac{1}{1+\lambda}\overrightarrow{OM_2}. \tag{5}$$

$\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM_1}$ və $\overrightarrow{OM_2}$ vektorları M, M_1 və M_2 nöqtələrinin rabius-vektorları olduqlarından, $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ bazisində $\overrightarrow{OM}(x,y)$, $\overrightarrow{OM_1}(x_1,y_1)$, $\overrightarrow{OM_2}(x_2,y_2)$ koordinatlarına malikdirlər. (5) bəra-bərliyində vektorun koordinatlarının 3^0 və 1^0 xassələrindən (§ 3) istifadə etsək, x və y koordinatları üçün alarıq:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda},\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}. \tag{6}$$

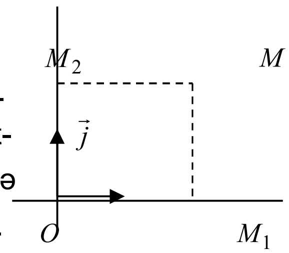
Xüsusi halda, M_1M_2 parçasının orta nöqtəsinin, yəni bu parçanı yarıya bölən $(\lambda = 1)$ nöqtənin

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2},\ y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

koordinatları vardır.

IV Mühazirə
Düzbucaqlı koordinat sistemi. Skalyar hasil, xassələri

1. Koordinat vektorları qarşılıqlı perpendikulyar vahid vektorlar olan koordinat sisteminə *düzbucaqlı dekart* koordinat sistemi deyilir. Başlanğıcı O nöqtəsində olan belə koordinat sistemi $O\vec{i}\vec{j}$ və ya $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ kimi işarə olunur burada $\vec{i}^{\,2} = \vec{j}^{\,2} = 1,\ \vec{i}\vec{j} = 0$ (şək. 1).



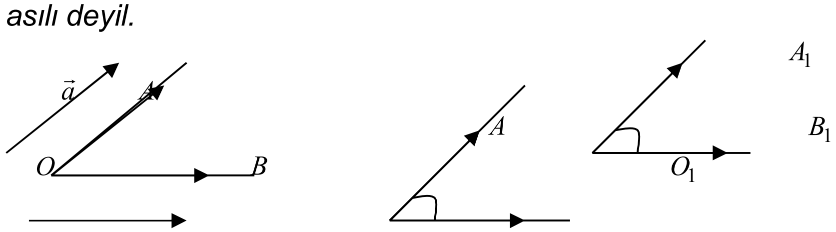
Şəkil 1

Düzbucaqlı koordinat sistemində $M(x,y)$ nöqtəsinin koordinatlarının mənasını izah edək. $x\vec{i} \parallel \vec{i}$ və $y\vec{j} \parallel \vec{j}$ olduğundan Ox və Oy koordinat oxları üzərində uyğun olaraq elə M_1 və M_2 nöqtələri vardır ki, $x\vec{i} = \overrightarrow{OM_1}, y\vec{j} = \overrightarrow{OM_2}$, ona görə də $OM_1 = |x|, OM_2 = |y|.$ M_1 və M_2 nöqtələri M nöqtəsinin koordi-nat oxları üzərində proyeksiyalarıdır (şək. 1). Beləliklə, M_1 nöqtəsi Ox oxunun müsbət yarımoxunun nöqtəsi olduqda $x = OM_1$, mənfi yarımoxunun nöqtəsi olduqda $x = -OM_1$ və M_1 nöqtəsi O nöqtəsi ilə üst-üstə düşdükdə $x = 0.$ M nöqtəsinin y ordinatı da eyni həndəsi mənaya malikdir.

Tutaq ki, düzbucaqlı dekart $O\vec{i}\vec{j}$ koordinat sistemində A, B nöqtələrinin $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ koordinatları vardır. Bu nöqtələr arasındakı məsafəni, yəni AB parçasının uzunluğunu hesablayaq. Vektorun uzunluğunun tərifinə əsasən, $\overrightarrow{AB}$ vektorunun $\overrightarrow{AB}(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ koordinatları vardır, ona görə də bu vektorun uzunluğu analoji olan aşağıdakı düsturla hesablanır:

$$AB = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \tag{1}$$

2. Tutaq ki, $\vec{a}$ və $\vec{b}$ sıfırdan fərqli vektorlardır. İxtiyari O nöqtəsindən $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ və $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ vektorlarını ayırıb OA və OB şüalarına baxaq (şək. 2, a). $\vec{a}$ və $\vec{b}$ *vektorları arasındakı bucaq* dedikdə OA və OB şüaları üst-üstə düşmədiyi halda bu şüalar arasındakı bucaq, yəni AOB bucağı başa düşülür. OA və OB şüaları üst-üstə düşdükdə isə $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları arasındakı bucağın sıfra bərabər olması qəbul edilir. $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları arasındakı bucaq $\left(\vec{a},\vec{b}\right)$ kimi işarə olunur. Tərəfləri eyni istiqamətli olan bucaqlar bərabər olduğundan (şək. 2, b), *verilmiş vektorlar arasındakı bucaq O nöqtəsinin seçimindən asılı deyil.*



$\vec{b}$ O

B

a) b)

Şəkil 2

$\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ olduqda sıfırdan fərqli $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarına *qarşılıqlı perpendikulyar vektorlar* deyilir. Bu halda $\vec{a} \perp \vec{b}$ yazılır. $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarından heç olmasa birinin sıfır vektor olması halında $\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ olduğunu qəbul edirik. Buradan aydın olur ki, sıfır vektor istənilən vektora perpendikulyardır. Beləliklə, istə-nilən $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları üçün $0 \le \left(\vec{a}, \vec{b}\right) \le \pi$.

İki vektorun uzunluqlarının onlar arasındakı bucağın kosinusuna hasilinə bu vektorların skalyar hasili deyilir. $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarının skalyar hasili $\vec{a} \cdot \vec{b}$ və ya $\vec{a}\vec{b}$ kimi işarə olunur. Beləliklə, tərifə əsasən,

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}|\left|\vec{b}\right| \cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right). \tag{2}$$

Bu düsturdan görünür ki, *yalnız və yalnız* $\vec{a} \perp \vec{b}$ *olduqda* $\vec{a}\vec{b} = 0$. Bu nəticə $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarından heç olmasa biri sıfır vektor olduqda da doğrudur.

(2) düsturundan alınır ki, $\vec{a}\vec{a} = |\vec{a}|^2$. $\vec{a}\vec{a}$ ədədi $\vec{a}$ vektorunun *skalyar kvadratı* adlanır və $\vec{a}^2$ kimi işarə olunur. Beləliklə,

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}. \tag{3}$$

3. İki vektorun skalyar hasilini onları koordinatlarına görə təyin etməyə imkan verən aşağıdakı teorem doğrudur.

Teorem 1. *Ortonormallaşdırılmış bazisdə verilmiş* $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ *və* $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$ *vektorlarının skalyar hasili*

$$\vec{a}\vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \tag{4}$$

düsturu ilə ifadə olunur.

İsbatı. $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarından heç olmasa biri sıfır vektor olduğu halda (4) bərabərliyinin doğruluğu aşkardır. Ona görə də $\vec{a} \ne \vec{0}$ və $\vec{b} \ne \vec{0}$ halına baxmaq kifayətdir.

Əvvəlcə fərz edək ki, $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları kollineardırlar. Hər hansı O nöqtəsindən $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ və $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ vektorlarını ayıraq və OAB üçbucağına baxaq. Kosinuslar teoreminə görə $AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cos\alpha$, burada $\alpha = \left(\vec{a}, \vec{b}\right)$. $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$, $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}$ olduğundan sonuncu bərabərliyi belə yaza bilərik:

$$\vec{a}\vec{b} = \frac{1}{2}\left(|\vec{a}|^2 + \left|b^2\right| - \left|\vec{b} - \vec{a}\right|^2\right). \tag{5}$$

$\left(\vec{b} - \vec{a}\right)(b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$ olduğundan, $\left|\vec{b} - \vec{a}\right|^2 = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2$. Analoji mühakiməyə görə

$$|\vec{a}|^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2, \ \left|\vec{b}\right|^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2. \tag{6}$$

Bu qiymətləri (5) düsturunda yerinə yazıb, müvafiq elementar çevirmələri aparsaq, (4) düsturunu alarıq.

İndi isə $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarının kollinear olduğunu qəbul edək. Koolinear vektorlara dair teoremə əsasən elə λ ədədi vardır ki, $\vec{a} = \lambda\vec{b}$. Bu isə o deməkdir ki,

$$a_1 = \lambda b_1, a_2 = \lambda b_2, a_3 = \lambda b_3. \tag{7}$$

Skalyar hasilin tərifinə əsasən $\vec{a}\vec{b}=(\lambda\vec{b})\vec{b}=|\lambda\vec{b}||\vec{b}|\cos(\lambda\vec{b},\vec{b})$. Bura-dan alınır ki, istənilən λ ədədi üçün: $\vec{a}\vec{b}=\lambda|\vec{b}|^2$. Bilirik ki, $|\vec{b}|^2=b_1^2+b_2^2+b_3^2$, ona görə də

$$\vec{a}\vec{b}=\lambda(b_1^2+b_2^2+b_3^2)=(\lambda b_1)b_1+(\lambda b_2)b_2+(\lambda b_3)b_3 .$$

Sonuncu bərabərlikdə (7) şərtlərindən istifadə etsək, (4) düsturunu alarıq. $\blacksquare$

Nəticə 1. *Ortonormallaşdırılmış bazisdə verilən* $\vec{a}(a_1,a_2,a_3)$ *və* $\vec{b}(b_1,b_2,b_3)$ *vektorları yalnız və yalnız*

$$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$$

olduqda qarşılıqlı perpendikulyardırlar.

Nəticə 2. *Ortonormallaşdırılmış bazisdə verilən sıfırdan fərqli* $\vec{a}(a_1,a_2,a_3)$ *və* $\vec{b}(b_1,b_2,b_3)$ *vektorları arasında qalan bucağın kosinusu*

$$\cos(\vec{a},\vec{b})=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}} \tag{8}$$

düsturu ilə hesablanır.

Doğrudan da, (2) düsturuna görə $\cos(\vec{a},\vec{b})=\frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$. Bu bərabərlikdə $\vec{a}\vec{b},|\vec{a}|$ və $|\vec{b}|-$nin (4) və (5) düsturlarından olan qiy-mətlərini yerinə yazsaq, (8) düsturunu alarıq. $\blacksquare$

4. Aşağıdakı teorem vektorların skalyar hasili əməlinin əsas xassələrini ifadə edir.

Teorem 2. *İxtiyari* α *və* β *ədədləri və ixtiyari* $\vec{a},\vec{b}$ *və* $\vec{c}$ *vektorları üəün aşağıdakı bərabərliklər doğrudur:*

1^0. $\vec{a}\vec{b}=\vec{b}\vec{a}$.

2^0. $(\alpha\vec{a})\vec{b}=\alpha(\vec{a}\vec{b})$ və $\vec{a}(\alpha\vec{b})=\alpha(\vec{a}\vec{b})$.

3^0. $(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}=\vec{a}\vec{c}+\vec{b}\vec{c}$.

İsbatı. Ortonormallaşdırılmış $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ bazisini seçək və verilmiş vektorların $\vec{a}(a_1,a_2,a_3),\vec{b}(b_1,b_2,b_3),\vec{c}(c_1,c_2,c_3)$ koordi-natlarını daxil edək. Bərabərliklərdən birini, məsələn 3^0 bərabərliyini isbat edək, qalanları eyni qayda ilə isbat olunur. $(\vec{a}+\vec{b})(a_1+b_1,a_2+b_2,a+b_3)$ olduğundan, (4) dusturuna əsasən,

$$(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}=(a_1+b_1)c_1+(a_2+b_2)c_2+(a_2+b_2)c_2=(a_1c_1+a_2c_2+$$
$$+a_3c_3)+(b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3)=\vec{a}\vec{c}+\vec{b}\vec{c}. \ \blacksquare$$

Nəticə 3. *İxtiyari* $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ *və* $\vec{c}$ *vektorları üçün*

$$(\vec{a}+\vec{b})(\vec{c}+\vec{d})=\vec{a}\vec{c}+\vec{b}\vec{c}+\vec{a}\vec{d}+\vec{b}\vec{d}$$

bərabərliyi doğrudur.

V Mühazirə

Müstəvinin oriyentasiyası

1. Tutaq ki, $L-$müstəviyə paralel olan vektorların iki ölçülü vektor alt fəzasıdır. Bu vektor alt fəzasının hər hansı iki $A=(\vec{a}_1,\vec{a}_2)$ və $B=(\vec{b}_1,\vec{b}_2)$ bazislərinə baxaq. B bazisinin vektor-larını A bazisinin vektorları üzrə ayıraq:

$$\vec{b}_1=c_{11}\vec{a}_1+c_{21}\vec{a}_2,\ \vec{b}_2=c_{12}\vec{a}_1+c_{22}\vec{a}_2. \tag{1}$$

$\vec{b}_1$ və $\vec{b}_2$ vektorlarının koordinatlarından düzələn $\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$ matrisinə A bazisindən B bazisinə *keçid matrisi,* onun determi-nantına, yəni $c_{11}c_{22} - c_{21}c_{12}$ ədədinə isə A *bazisindən* B *bazisinə keçid matrisinin determinantı* deyilir və belə işarə olunur:

$$A|B = (\vec{a}_1\vec{a}_2)|(\vec{b}_1\vec{b}_2) = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}. \qquad (2)$$

$\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$ vektorları xətti asılı olmadığından, $A|B \neq 0.$

Bir bazisdən digərinə keçid matrislərinin determinantları-nın bəzi xassələrini qeyd edək.

1^0. *İstənilən* $A = (\vec{a}_1, \vec{a}_2)$ *bazisi üçün:* $A|A = 1.$

Doğrudan da, $\vec{a}_1 = 1 \cdot \vec{a}_1 + 0 \cdot \vec{a}_2, \vec{a}_2 = 0 \cdot \vec{a}_1 + 1 \cdot \vec{a}_2,$ ona görə də $A|A = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$ $\blacksquare$

2^0. *İxtiyari üç* $A = (\vec{a}_1, \vec{a}_2)$, $B = (\vec{b}_1, \vec{b}_2)$ *və* $C = (\vec{c}_1, \vec{c}_2)$ *ba-zisləri üçün*

$$(A|B)(B|C) = A|C. \qquad (3)$$

bərabərliyi doğrudur.

Xassənin doğruluğunu əsaslandırmaq üçün fərz edək ki, $\vec{c}_1 = d_{11}\vec{b}_1 + d_{21}\vec{b}_2,\ \vec{c}_2 = d_{12}\vec{b}_1 + d_{22}\vec{b}_2.$ Bu bərabərliklərin sağ tərəflərində (1) ayrılışlarını nəzərə alaq:

$$\vec{c}_1 = d_{11}(c_{11}\vec{a}_1 + c_{21}\vec{a}_2) + d_{21}(c_{12}\vec{a}_1 + c_{22}\vec{a}_2),$$
$$\vec{c}_2 = d_{12}(c_{11}\vec{a}_1 + c_{21}\vec{a}_2) + d_{22}(c_{12}\vec{a}_1 + c_{22}\vec{a}_2).$$

Buradan A bazisindən C bazisinə keçid matrisinin determinantını determinantını təyin edirik:

$$A|B = \begin{vmatrix} d_{11}c_{11} + d_{21}c_{12} & d_{12}c_{11} + d_{22}c_{12} \\ d_{11}c_{21} + d_{21}c_{22} & d_{12}c_{21} + d_{22}c_{22} \end{vmatrix}.$$

$B|C = \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{vmatrix}$ olduğundan, (2) düsturunu nəzərə alaraq, müvafiq hesablamalar aparmaqla (3) bərabərliyinin doğruluğunu müəyyən edirik. $\blacksquare$

Əgər (3) bərabərliyində $C = A$ qəbul edib 2^0 xassəsindən istifadə etsək, 3^0 xassəsini alarıq.

3^0. $(A|B)(B|A) = 1.$

2. L alt fəzasının bütün bazisləri çoxluğunu **B** ilə işarə edək. $A|B > 0$ olduqda deyəcəyik ki, $A, B \in$ **B** bazisləri Δ münasibətindədirlər (eyni oriyentasiyaya malikdirlər). Bu halda $A\Delta B$ yazılışından istifadə edəcəyik. İsbat edək ki, L *alt fəzasının bütün bazislərinin* **B** *çoxluğunda* Δ *münasibəti ekvivalentlik münasibətidir.*

1) İstənilən A bazisi üçün: $A\Delta A.$ Bu nəticə 1^0 xassəsindən alınır.

2) Əgər $A\Delta B$ olarsa, onda $B\Delta A.$ Doğrudan da, $A\Delta B \Rightarrow\ \Rightarrow A|B > 0.$ Lakin 3^0 xassəsindən alınır ki, $B|A = \dfrac{1}{A|B} > 0$, ona görə də $B\Delta A.$

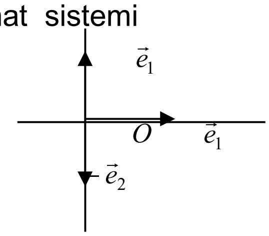
3) Əgər $A\Delta B$ və $B\Delta C$ olarsa, onda $A\Delta C.$ Doğrudan da, $A\Delta B \Rightarrow A|B > 0,\quad B\Delta C \Rightarrow B|C > 0.$ 2^0 xassəsinə əsasən, $A|C = \ = (A|B)(B|C) > 0,$ yəni $A\Delta C.$

İsbat edək ki, **B** / Δ faktor-çoxluğu yalnız iki elementdən ibarətdir. Bundan ötrü $A = (\vec{a}_1, \vec{a}_2)$ və $B = (\vec{a}_2, \vec{a}_1)$ bazislərinə baxaq. $A|B = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$ olduğundan, K_A və K_B ekvivalentlik sinifləri üst-üstə düşmürlər. Yoxlamaq olur ki, ixtiyari $C = (\vec{c}_1, \vec{c}_2)$ bazisi ya

K_A sinfinə, ya da K_B sinfinə daxildir. Doğrudan da, 2^0 xassəsinə görə $A|C = (A|B)(B|C)$. Lakin $A|B = -1$, ona görə də $A|C = -B|C$. Buradan alınır ki, ya $A|C > 0$, ya da $B|C > 0$. Birinci halda $C \in K_A$, ikinci halda isə $C \in K_B$ olur.

B $/\Delta$ faktor-çoxluğunun elementlərindən hər birinə L vektor alt fəzasının *oriyentasiyası* deyilir. Bu oriyentasiyalardan birini seçək və onu *müsbət oriyentasiya* (digərini isə-*mənfi oriyentasiya*) adlandıraq. Müsbət oriyentasiyanın seçildiyi L vektor alt fəzasına *oriyentasiya olunmuş* alt fəza deyilir. Müsbət oriyentasiyalı bazislər *sağ* bazislər, mənfi oriyentasiyalı bazislər isə *sol* bazislər adlanır.

Vektorlarının alt fəzası oriyentasiya olunmuş müstəviyə *oriyentasiya olunmuş* müstəvi deyilir. $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ bazisi sağ bazis olduqda $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ koordinat sistemi *sağ*, sol bazis olduqda isə *sol* koordinat sistemi adlanır. Şəkil 12-də $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ - sağ koordinat sistemi, $O\vec{e}_1(-\vec{e}_2)-$sol koordinat sistemidir. Ümumiyyətlə, koordinat sistemlərinin təsviri zamanı sağ koordinat sisteminə elə koordinat sistemi aid edilir ki, onun Ox və Oy oxları sağ əlin açılmış ovucuna baxdıqda baş və şəhadət barmaqları kimi yerləşmiş olsunlar.



Şəkil 1

VI Mühazirə

Müstəvi üzərində afin və düzbucaqlı koordinat sistemlərinin çevrilməsi. Müstəvi üzərində polyar koordinat sistemi

1. Oriyentasiya olunmuş müstəvi üzərində vektorlar ara-sında qalan istiqamətlənmiş bucaq anlayışını daxil edək. Tutaq ki, $\vec{a}$ və $\vec{b}-$müəyyən nizamla verilmiş sıfırdan fərqli vektorlardır: $\vec{a}-$birinci vektordur, $\vec{b}$ isə ikinci vektordur. $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarının kollinear olmadığı halda $\vec{a}$ vektoru ilə $\vec{b}$ vektoru ara-sında qalan *istiqamətlənmiş (oriyentasiya olunmuş)* bucaq olaraq, $\vec{a}, \vec{b}$ bazisi sağ bazis olduqda $(\vec{a}, \vec{b}\ )$ kəmiyyəti, $\vec{a}, \vec{b}$ bazisi sol bazis olduqda isə $-(\vec{a}, \vec{b}\ )$ kəmiyyəti götürülür. $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektor-larının istiqamətləri eyni olduqda onlar arasında qalan istiqamət-lənmiş bucağın $0-$a, əks olduqda isə $\pi-$yə bərabər olması qəbul edilir. $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları arasında qalan istiqamətlənmiş bucaq $\left(\vec{a} \,\hat{,}\, \vec{b}\right)$ kimi işarə olunur. Beləliklə, sıfırdan fərqli istənilən $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları üçün $-\pi < \left(\vec{a} \,\hat{,}\, \vec{b}\right) \le \pi$.

$\left(\vec{a} \,\hat{,}\, \vec{b}\right)$=-$\left(\vec{b} \,\hat{,}\, \vec{a}\right)$ olduğundan, koolinear olmayan $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları üçün

$$\sin\left(\vec{a} \,\hat{,}\, \vec{b}\right) = -\sin\left(\vec{b} \,\hat{,}\, \vec{a}\right), \ \cos\left(\vec{a} \,\hat{,}\, \vec{b}\right) = \cos\left(\vec{b} \,\hat{,}\, \vec{a}\right).$$

Göstərmək olur ki, smıfırdan fərqli istənilən $\vec a, \vec b$ və $\vec c$ vektorları üçün

$$\sin\left(\left(\widehat{\vec a, \vec b}\right)+\left(\widehat{\vec b, \vec c}\right)\right)=\sin\left(\widehat{\vec a, \vec c}\right),$$

$$\cos\left(\left(\widehat{\vec a, \vec b}\right)+\left(\widehat{\vec b, \vec c}\right)\right)=\cos\left(\widehat{\vec a, \vec c}\right).$$

(2)

Aşağıdakı terem doğrudur:

Teorem 1 . *Ortonormallaşmış sağ $\vec i, \vec j$ bazisində sıfırdan fərqli istənilən $\vec a$ vektorunun (a_1, a_2) koordinatları*

$$a_1=|\vec a|\cos\left(\widehat{\vec i, \vec a}\right), a_2=|\vec a|\sin\left(\widehat{\vec i, \vec a}\right) \qquad (3)$$

düsturları ilə hesablanır.

İsbatı. Vektorun koordinatlarının tərifinə görə $\vec a = a_1\vec i + a_2\vec j.$ Bu bərabərliyi $\vec i$ vektoruna skalyar vurmaqla alarıq: $a_1=\vec i\,\vec a=|\vec i||\vec a|\cos\left(\widehat{\vec i, \vec a}\right),$ və ya $a_1=|\vec a|\cos\left(\widehat{\vec i, \vec a}\right).$ Analoji qayda ilə əvvəlki bərabərliyi $\vec j$ vektoruna skalyar vurmaqla yaza bilərik: $a_2=\vec j\,\vec a=|\vec j||\vec a|\cos\left(\widehat{\vec j, \vec a}\right),$ və ya $a_2=|\vec a|\cos\left(\widehat{\vec j, \vec a}\right).$

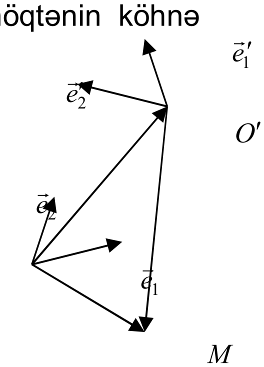
(2) düsturuna əsasən, $\cos\left(\widehat{\vec j, \vec a}\right)=\cos\left(\left(\widehat{\vec j, \vec i}\right)+\left(\widehat{\vec i, \vec a}\right)\right)=$ $=\cos\left(\widehat{\vec i, \vec a}-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(\widehat{\vec i, a}\right),$ ona görə də $a_2=|\vec a|\sin\left(\widehat{\vec i, \vec a}\right).$ ■

Nəticə. *Ortonormallaşmış $\vec i, \vec j$ bazisində vahid $\vec a_0$ vektoru-nun $\left(\cos\left(\widehat{\vec i, \vec a_0}\right), \sin\left(\widehat{\vec i, \vec a_0}\right)\right)$ koordinatları vardır.*

2. Müstəvi üzərində iki $O\vec e_1\vec e_2$ və $O'\vec e_1'\vec e_2'$ afin koordinat sis-temlərini nəzərdən keçirək. Birinci sistemi köhnə, ikinci sistemi isə yeni koordinat sistemi adlandıraq. Tutaq ki, M – müstəvinin ixtiyari nöqtəsidir və bu nöqtənin köhnə sistemdə x, y koordinatları, yeni sistem-də isə x', y' koordinatları vardır (şək.1). Koordinatların çevirməsi ilə bağlı məsə-lənin mahiyyəti yeni koordinat başlan-ğıcının və yeni koordinat vektorlarının köhnə sistem dəki

$$\vec e_1'(c_{11}, c_{21}), \vec e_2'(c_{12}, c_{22}),\ O'(x_0, y_0) \qquad (4)$$

koordinatlarına əsasən M nöqtəsinin köhnə sistemdəki x, y koordinatlarını həmin nöqtənin yeni sistemdəki x', y' koordinatları ilə ifadə etməkdən ibarətdir.



Şəkil 1

Vektorların və nöqtələrin koordinatlarının tərifinə əsasən, (4)-dən alarıq:

$$\vec e_1' = c_{11}\vec e_1 + c_{21}\vec e_2,\ \vec e_2' = c_{12}\vec e_1 + c_{22}\vec e_2,\ \overrightarrow{OO'} = x_0\vec e_1 + y_0\vec e_2. \qquad (5)$$

Üçbucaq qaydasına görə, $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'M}.$ Buradan aydın olur ki, $x\vec e_1 + y\vec e_2 = \overrightarrow{OO'} + x'\vec e_1' + y\vec e_2',$ və ya (5) bərabərliklərinə əsasən:

$$x\vec e_1 + y\vec e_2 = x_0\vec e_1 + y_0\vec e_2 + (c_{11}x' + c_{12}y')\vec e_1 + (c_{21}x' + c_{22}y')\vec e_2.$$

$\vec{e}_1$ və $\vec{e}_2$ vektorları kollinear olmadıqlarına görə bu bərabərlikdən aşağıdakı düsturlar alınır:

$$\begin{aligned} x &= c_{11}x' + c_{12}y' + x_0, \\ y &= c_{21}x' + c_{22}y' + y_0. \end{aligned} \tag{6}$$

(6) düsturları afin koordinat sisteminin *çevirmə düsturları* adlanır. Qeyd edək ki, bu düsturlardakı əmsallardan düzələn $\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$ matrisi $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ bazisindən $\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}'$ bazisinə keçid matrisidir. $\vec{e}_1$ və $\vec{e}_2$ vektorları kollinear olmadığından, $\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} \neq 0,$ ona görə də (6) sistemi x', y' koordinatlarına görə həll oluna bilən sistemdir. Bu isə M nöqtəsinin yeni $O'\vec{e}_1{}'\vec{e}_2{}'$ sistemindəki koordinatlarını həmin nöqtənin köhnə $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ sistemindəki koordinatları ilə ifadə etməyə imkan verir.

Afin koordinat sisteminin çevirməsinin iki xüsusi halına baxaq.

A. *Başlanğısın köçürülməsi.* Bu halda $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ və $O'\vec{e}_1{}'\vec{e}_2{}'$ koordinat sistemləri eyni koordinat vektorlarına və müxtəlif başlanğıclara malik olurlar. $\vec{e}_1 = \vec{e}_1{}', \vec{e}_2 = \vec{e}_2{}'$ olduğundan $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ bazisindən $\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}'$ bazisinə keçid matrisi $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şəklində olur, ona görə də (6) çevirmə düsturları belə yazılır:

$$x = x' + x_0, \quad y = y' + y_0. \tag{7}$$

B. *Koordinat vektorlarının əvəz edilməsi.* Bu halda $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ və $O'\vec{e}_1{}'\vec{e}_2{}'$ koordinat sistemlərinin ortaq başlanğıcı vardır və koordinat vektorları ilə fərqlənirlər. O' və O nöqtələri üst-üstə düşdüklərindən, $x_0 = 0, y_0 = 0$ olur. Nəticədə (6) çevirmə düsturları bu şəkildə yazılır:

$$x = c_{11}x' + c_{12}y', \quad y = c_{21}x' + c_{22}y'. \tag{8}$$

3. İndii isə düzbucaqlı dekart koordinat sistemlərinin çevirməsinə baxaq. Düzbucaqlı dekart koordinat sistemi afin koordinat sisteminin xüsusi halı olduğundan, bir düzbucaqlı koordinat sistemindən digərinə keçid zamanı da (6) düsturlarından istifadə edə bilərik, lakin bu halda keçid matrisinin c_{ij} elementlərinin üzərinə əlavə məhdudiyyətlər qoyulur. Köhnə $O\vec{i}\vec{j}$ koordinat sisteminin sağ oriyentasiyaya malik olduğunu fərz edək və iki hala baxaq.

A. $O\vec{i}\vec{j}$ və $O'\vec{i}'\vec{j}'$ koordinat sistemlərinin oriyentasiyaları eynidir, yəni hər iki sistem sağ oriyentasiyaya malikdir. Tutaq ki, $\alpha = \left(\widehat{\vec{i}, \vec{i}'}\right)$. Teorem 1-in nəticəsinə görə $\vec{i}'$ və $\vec{j}'$ vektorlarının

$$\vec{i}'(\cos\alpha, \sin\alpha), \vec{j}'\left(\cos\left(\widehat{\vec{i}, \vec{j}'}\right), \sin\left(\widehat{\vec{i}, \vec{j}'}\right)\right) \tag{9}$$

koordinatları vardır. Lakin

$$\cos\left(\widehat{\vec{i}, \vec{j}'}\right) = \cos\left[\left(\widehat{\vec{i}, \vec{i}'}\right) + \left(\widehat{\vec{i}', \vec{j}'}\right)\right] = \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\alpha;$$

$$\sin\left(\widehat{\vec{i}, \vec{j}'}\right) = \sin\left[\left(\widehat{\vec{i}, \vec{i}'}\right) + \left(\widehat{\vec{i}', \vec{j}'}\right)\right] = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\alpha.$$

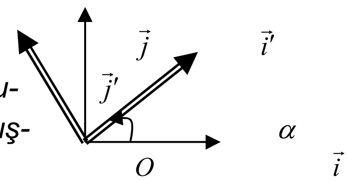
Beləliklə, (6) düsturları aşağıdakı kimi yazılır:

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\alpha - y'\sin\alpha + x_0, \\ y &= x'\sin\alpha + y'\cos\alpha + y_0, \end{aligned} \tag{10}$$

burada

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = 1.$$

Hər iki koordinat sisteminin ortaq O başlanğıcına malik olduğu hala baxaq. Bu halda deyirlər ki, *$O'\vec{i}'\vec{j}'$ koordinat sistemi $O\vec{i}\vec{j}$ koordinat sistemindən O nöqtəsi ətrafında α bucağı qədər dönmə nəticəsində alınmışdır* (şək.2). O' və O nöqtələri üst-üstə düşdüklərindən, $x_0 = 0, y_0 = 0$. Ona görə də (10) düsturları belə yazılır:



şəkil 2

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \\ y &= x'\sin\alpha + y'\cos\alpha. \end{aligned} \tag{11}$$

B. $O\vec{i}\vec{j}$ və $O'\vec{i}'\vec{j}'$ əks oriyentasiya olunmuş koordinat sistemləridir: $O\vec{i}\vec{j}$ sağ, $O'\vec{i}'\vec{j}'$ isə sol koordinat sistemidir. Bu halda da $\vec{i}'$ və $\vec{j}'$ vektorlarının (9) koordinatları vardır, lakin burada $\left(\vec{i}'\hat{,}\vec{j}'\right) = -\frac{\pi}{2}$, ona görə də

$$\cos\left(\vec{i}\hat{,}\vec{j}'\right) = \cos\left[\left(\vec{i}\hat{,}\vec{i}'\right) + \left(\vec{i}'\hat{,}\vec{j}'\right)\right] = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\alpha;$$

$$\sin\left(\vec{i}\hat{,}\vec{j}'\right) = \sin\left[\left(\vec{i}\hat{,}\vec{i}'\right) + \left(\vec{i}'\hat{,}\vec{j}'\right)\right] = \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos\alpha.$$

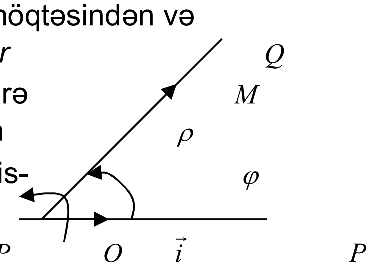
Nəticədə (6) düsturları belə yazılır:

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\alpha + y'\sin\alpha + x_0, \\ y &= x'\sin\alpha - y'\cos\alpha + y_0, \end{aligned} \tag{12}$$

burada

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{vmatrix} = -1.$$

4. Müstəvi üzərində afin koordinat sistemindən (və onun xüsusi halı olan düzbucaqlı dekart koordinat sistemindən) başqa, polyar koordinat sistemindən də istifadə olunur. *Oriyentasiya olunmuş* müstəvi üzərində O nöqtəsinin və vahid $\vec{i}$ vektorunun verildiyini fərz edək. O nöqtəsindən və $\vec{i}$ vektorundan ibarət olan cüt *polyar koordinat sistemi* adlanır və belə işarə olunur: $O\vec{i}$ və ya $\left(O,\vec{i}\right)$. O nöqtəsindən $\vec{i}$ vektoruna paralel keçən və müsbət istiqaməti bu vektorla təyin olunan OP oxuna baxaq. O nöqtəsinə *polyus,* OP oxuna isə *polyara* deyilir (şək. 15).



Şəkil 15

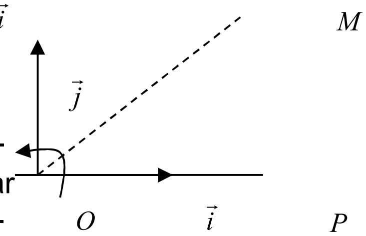
Tutaq ki, $M-$müstəvinin ixtiyari nöqtəsidir. O nöqtəsindən M nöqtəsinə qədər olan məsafəni ρ ilə, $\left(\vec{i}\,\hat{}\,\overrightarrow{OM}\right)$ istiqamətlənmiş bucağını isə φ ilə işarə edək, yəni $\rho = \left|\overrightarrow{OM}\right|, \varphi = \left(\vec{i}\,\hat{}\,\overrightarrow{OM}\right)$. M nöqtəsi O nöqtəsi ilə üst-üstə düşdükdə $\rho = 0$ olur, φ bucağı isə təyin olunmur. ρ və φ ədədləri müstəvi üzərində M nöqtəsinin vəziyyətini birqiymətli təyin edirlər. Bu ədədlərə M nöqtəsinin $O\vec{i}$ polyar koordinat sistemində *polyar koordinatları* deyilir. ρ ədədi M nöqtəsinin birinci polyar koordinatı, və ya *polyar radiusu*,

φ ədədi isə bu nöqtənin ikinci polyar koordinatı, və ya *polyar bucağı* adlanır. M nöqtəsinin polyar koordinatları ρ, φ olduqda belə yazılır: $M(\rho, \varphi)$.

Qeyd edək ki, ρ polyar radiusu ixtiyari nöqtə üçün mənfi olmayan ədəddir və $[0, +\infty)$ aralığında dəyişir. φ polyar bucağı isə $-\pi < \varphi \leq \pi$ şərtini ödəyir.

5. Hər bir $O\vec{i}$ polyar koordinat sisteminə müsbət oriyentasiya olunmuş $O\vec{i}\vec{j}$ düzbucaqlı dekart koordinat sistemini qoş-maq mümkündür, burada başlanğıc O nöqtəsidir, birinci koordinat vektoru $\vec{i}$ vektorudur və $\left(\widehat{\vec{i}, \vec{j}}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ (şək. 16).

Tutaq ki, ρ və φ-O nöqtəsindən fərqli olan M nöqtəsinin polyar koordinatlarıdır, x, y isə onun qoşulmuş düzbucaqlı koordinat sistemində düzbucaqlı koordinatlarıdır.



Şəkil 16

Onda $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$ və $\varphi = \left(\vec{i} \wedge \overrightarrow{OM}\right)$. Teorem 1-ə görə

$$x = \rho\cos\varphi, y = \rho\sin\varphi. \tag{13}$$

M nöqtəsinin ρ və φ polyar koordinatlarını bilərək, (13) düsturlarına əsasən bu nöqtənin düzbucaqlı dekart koordinat-larını təyin etmək olar. (13) düsturlarından alırıq: $x^2 + y^2 = \rho^2$ və ona görə də

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{14}$$

O polyusundan fərqli olan M nöqtəsi üçün (13) və (14) düsturla-rından müəyyən edirik:

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \tag{15}$$

Koordinat başlanğıcından fərqli olan M nöqtəsinin x, y düzbucaqlı dekart koordinatlarını bilməklə (14) və (15) düsturlarına əsasən bu nöqtənin ρ və φ polyar koordinatlarını təyin etmək olur.

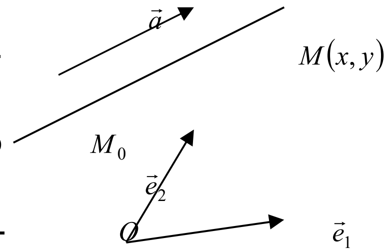
VII Mühazirə

Müstəvi üzərində düz xəttin verilmə üsulları.. Düz xəttinümumi tənliyi, onun araşdırılması

1. Verilmiş düz xəttə paralel olan istənilən vektor onun *yönəldici,* yaxud *istiqamətverici vektoru* adlanır. Düz xəttin vəziyyəti bu düz xəttin yönəldici vektorunun və müəyyən nöqtəsi-nin, yaxud iki nöqtəsinin verilməsi ilə birqiymətli təyin olunur.

Tutaq ki, müstəvi üzərində $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ afin koordinat sistemi seçilmişdir və bu sistemdə d düz xəttinin müəyyən $M_0(x_0, y_0)$ nöqtəsinin və yönəldici $\vec{a}(a_1 a_2)$
d

vektorunun koordinatları məlumdur (şək. 1). d düz xəttinin tənliyini yazaq. Aşkardır ki, $M(x,y)$ nöqtəsi yalnız və yalnız $\overrightarrow{M_0M}$ və $\vec{a}$ vektorları kollinear olduqda d düz xəttinə aid olar. $\overrightarrow{M_0M}$ vektoru $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ koordinat sistemində $(x-x_0, y-y_0)$ koordinatları olduğundan, $\overrightarrow{M_0M}$ və $\vec{a}$ vektorlarının kollinearlıq şərtini belə yaza bilərik:



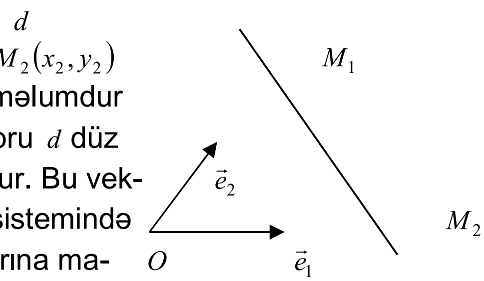
Şəkil 1

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & a_1 \\ y-y_0 & a_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (1)$$

M nöqtəsi d düz xətti üzərində yerləşdikdə onun koordinatları (1) tənliyini ödəyirlər və bu nöqtə d düz xətti üzərində yerləşmədikdə isə onun koordinatları (1) tənliyini ödəmirlər, ona görə də (1) tənliyi d düz xəttinin tənliyidir. (1) tənliyini bu şəkildə də yazmaq olar:

$$a_2(x-x_0) - a_1(y-y_0) = 0. \quad (2)$$

2. İki nöqtəsi ilə verilən düz xəttin tənliyini çıxaraq. Tutaq ki, $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ afin koordinat sistemində d düz xəttinin $M_1(x_1,y_1)$ və $M_2(x_2,y_2)$ nöqtələrinin koordinatları məlumdur (şək. 2). Onda $\overrightarrow{M_1M_2}$ vektoru d düz xəttinin yönəldici vektorudur. Bu vektor $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ afin koordinat sistemində (x_2-x_1, y_2-y_1) koordinatlarına malikdir. Ona görə də (1) düsturuna əsasən d düz xəttinin tənliyi aşağıdakı kimi yazılar:



Şəkil 2

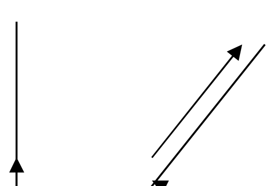
$$\begin{vmatrix} x-x_1 & x_2-x_1 \\ y-y_1 & y_2-y_1 \end{vmatrix} = 0. \quad (3)$$

$x_2-x_1 \neq 0$ və $y_2-y_1 \neq 0$ olduqda (3) tənliyini bu şəkildə də yazmaq olar:

$$\frac{x-x_0}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}. \quad (4)$$

3. Tutaq ki, müstəvi üzərində $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ afin koordinat sistemi seçilmiş və *ordinat oxunu kəsən* d düz xətti verilmişdir. Əgər $\vec{a}(a_1,a_2)$- d düz xəttinin yönəldici vektorudursa, onda $\vec{a}$ və $\vec{e}_2$ kollinear olmayan vektorlardır, ona görə də $a_1 \neq 0$. $k = \frac{a_2}{a_1}$ ədədi d *düz xəttinin bucaq əmsalı adlanır.* Göstərək ki, bucaq əmsalı düz xəttin yönəldici vektorunun seçimindən asılı deyil. Doğrudan da, əgər $\vec{b}(b_1,b_2)$ d düz xəttinin digər yönəldici vektorudursa, onda $\vec{a} \parallel \vec{b}$ və ona görə də $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarının koordinatları mütənasibdirlər: $a_1 = \lambda b_1$, $a_2 = \lambda b_2$. Buradan $a_1 \neq 0, b_1 \neq 0$ şərtlərinə əsa-sən alarıq: $\frac{a_2}{a_1} = \frac{\lambda b_2}{\lambda b_1} = \frac{b_2}{b_1}$.

d düz xətti $O\vec{i}\vec{j}$ düzbucaqlı koordinat sistemində veril-dikdə k bucaq əmsalı daha sadə həndəsi mənaya malik olur. Doğrudan da, tutaq ki, $\vec{a}(a_1,a_2)$– bu düz xəttin yönəldici vektorudur.

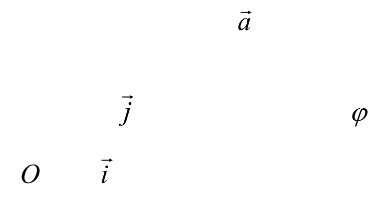


Onda § 6-dakı teorem 1-ə əsasən

$$a_1 = |\vec{a}|\cos\varphi, a_2 = |\vec{a}|\sin\varphi,$$

burada $\varphi = (\vec{i}\,\hat{}\,\vec{a})$ (şək. 3). Ona görə də

$$k = \frac{|\vec{a}|\sin\varphi}{|\vec{a}|\cos\varphi} = tg\varphi.$$ Beləliklə, k ədədi $\varphi = (\vec{i}\,\hat{}\,\vec{a})$ istiqamətlənmiş bucağını təyin etməyə imkan verir.



Şəkil 3

Tutaq ki, k - $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ afin koordinat sistemində verilmiş d düz xəttinin bucaq əmsalıdır. Aşkardır ki, koordinatları $k = \frac{p_2}{p_1}$ bərabərliyini ödəyən istənilən sıfırdan fərqli $\vec{p}(p_1, p_2)$ vektoru d düz xəttinin yönəldici vektorudur. Ona görə də k ədədi məlum olduqda d düz xəttinin istiqamətini və bu düz xəttin hər hansı M_0 nöqtəsi verildikdə isə onun vəziyyətini təyin etmək mümkündür.

$O\vec{e}_1\vec{e}_2$ afin koordinat sistemində $M_0(x_0, y_0)$ nöqtəsi və k bucaq əmsalı ilə verilən düz xəttin tənliyini yazaq. Tutaq ki, $\vec{a}(a_1, a_2)-$ düz xəttin yönəldici vektorudur. (2) düsturuna əsasən düz xəttin tənliyi $a_2(x - x_0) - a_1(y - y_0) = 0$ şəklindədir. Buradan a_1 ədədinə bölməklə alarıq:

$$y - y_0 = k(x - x_0). \tag{5}$$

Əgər $M_0(x_0, y_0)$ nöqtəsi olaraq d düz xəttinin ordinat oxu ilə $B(0, b)$ kəsişmə nöqtəsini götürsək, onda (5) tənliyi belə yazılır:

$$y = kx + b. \tag{6}$$

(6) tənliyi *düz xəttin bucaq əmsallı tənliyi* adlanır. Qeyd edək ki, ordinat oxunu kəsən istənilən düz xəttin tənliyini (6) şəklində yazmaq olar.

4. Müstəvi üzərində hər hansı $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ afin koordinat sistemini seçək . Tutaq ki, d - yönəldici vektoru $\vec{a}(a_1, a_2)$ vek-toru olan və $M_0(x_0, y_0)$ nöqtəsindən keçən düz xəttdir. $M(x, y)$ nöqtəsi yalnız və yalnız $\overrightarrow{M_0M} \| \vec{a}$ olduqda, yəni müəyyən t ədədi üçün $\overrightarrow{M_0M} = t\vec{a}$ bərabərliyi ödənildikdə d düz xəttinə aid olur. Bu münasibəti koordinatlarla $x - x_0 = ta_1, y - y_0 = ta_2$ və ya

$$\begin{aligned} x &= x_0 + ta_1, \\ y &= y_0 + ta_2. \end{aligned} \tag{7}$$

şəklində yaza bilərik. Bu bərabərliklər *düz xəttin parametrik tənlikləri,* t isə onun *parametri* adlanır. (7) parametrik tənliklə-rinin mahiyyəti aşağıdakılardan ibarətdir: istənilən t ədədi üçün x, y koordinatları (7) şərtlərini ödəyən nöqtə d düz xəttinin üzərində yerləşir. Tərsinə, əgər $(x, y) - d$ düz xəttinin nöqtəsidir-sə, onda (7) bərabərliklərini ödəyən t ədədi vardır.

5. Yuxarıdakı mühakimələr göstərir ki (bax (2) tənliyi), istənilən düz xəttin afin koordinat sistemində tənliyi bir dərəcəli tənlikdir, yəni

$$Ax + By + C = 0 \tag{9}$$

şəklində yazıla bilər, burada A və B eyni vaxtda sıfra bərabər olmayan ədədlərdir.

Tərs hökmün doğruluğunu isbat edək.

Teorem 1. *Afin koordinat sistemində* (9) *bir dərəcəli tənliyi ilə verilən xətt düz xəttdir.* $(-B, A)$ *vektoru bu düz xəttin yönəldici vektorudur.*

İsbatı. Tutaq ki, $\gamma -$(9) tənliyi ilə verilən düz xəttdir, $M_0(x_0, y_0)$ isə onun müəyyən nöqtəsidir. Bu o deməkdir ki, $M_0(x_0, y_0)$ nöqtəsinin koordinatları (9) tənliyini ödəyirlər:

$$Ax_0 + By_0 + C = 0. \tag{10}$$

C əmsalını (10) bərabərliyindən təyin edib, (9) tənliyində yerinə yazmaqla, γ xəttinin $Ax + By - Ax_0 - By_0 = 0$ və ya $A(x - x_0) - \; -(-B)(y - y_0) = 0$ şəklində tənliyini alırıq. Bu tənlik (2) şəklində olan tənlikdər, ona görə də $M_0(x_0, y_0)$ keçən və yönəldici vektoru $\vec{a}(-B, A)$ olan düz xətti təyin e[redacted]r.

Beləliklə afin koordinat sistemində istənilən bir dərəcəli (9) tənliyi düz xətt təyin edir. (9) tənliyinə *düz xəttin ümumi tənliyi* deyilir. Düz xəttin ümumi tənliyinin xüsusi hallarını qeyd edək.

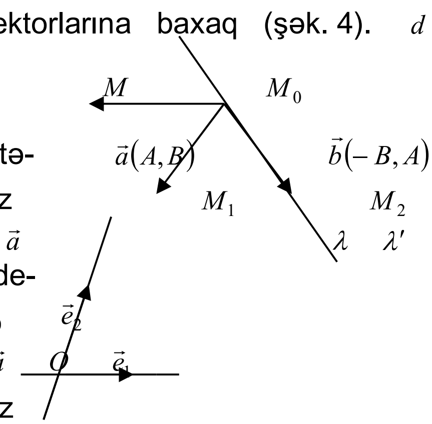
1) $C = 0$ olduqda $O(0,0)$ nöqtəsinin koordinatları (9) tənliyini ödəyirlər, ona görə də düz xətt koordinat başlanğıcından keçir. Tərsinə, düz xətt koordinat başlanğıcından keçdiyi halda $C = 0$ olur. Beləliklə, *(9) düz xətti yalnız və yalnız $C = 0$ olduqda koordinat başlanğıcından keçir.* Bu halda düz xəttin tənliyi $Ax + By = 0$ şəklində olur.

2) $A = 0$ olduqda düz xəttin yönəldici $\vec{a}(-B, 0)$ vektoru $\vec{e}_1$ koordinat vektoruna kollinear olur, bu isə $\vec{e}_1$ vektorunun düz xəttə paralel olması deməkdir. Tərsinə, əgər $\vec{a} \parallel \vec{e}_1$ olarsa, onda $\begin{vmatrix} -B & A \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow A = 0.$ Beləliklə, *$\vec{e}_1$ vektoru yalnız və yalnız $A = 0$ olduqda (9) düz xəttinə paralel olur.* Bu halda düz xəttin tənliyi $By + C = 0$ və ya $y = b$ şəklində olur, burada $b = -\dfrac{C}{B}$.

$A = 0, B \neq 0$ olduqda, (9) düz xətti koordinat başlanğıcın-dan keçmir və ona görə də Ox oxuna paralel olur; $A = C = 0$ olduqda isə düz xətt Ox oxuna paralel olur və tənliyi $y = 0$ şəklində yazılır.

3) Analoji olaraq $\vec{e}_2$ vektoru yalnız və yalnız $B = 0$ olduqda (9) tənliyinə paralel olur. $B = 0, C \neq 0$ olduqda düz xətt Oy oxuna paraleldir və $B = C = 0$ olduqda isə Oy oxu ilə üst-üstə düşür və tənliyi $x = 0$ şəklində yazılır.

6. Müstəvi üzərində $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ afin koordinat sistemini daxil edək və bu sistemdə (9) tənliyi ilə verilən d düz xəttinə baxaq. d düz xətti müstəvinin həin düz xəttə aid olmayan nöqtələr çoxluğunu iki yarımmüstəviyə ayırır. Bu yarımmüstəviləri təyin edən şərtləri müəyyənləşdirək. d düz xətti üzərində müəyyən $M_0(x_0, y_0)$ nöqtəsini qeyd edərək $\vec{a}(A, B)$ və $\vec{b}(-B, A)$ vektorlarına baxaq (şək. 4). $\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} = A^2 + B^2 > 0$ olduğundan, bu vektorlar sağ bazis təyin edirlər. $\vec{b}$ vektoru d düz xəttinə paralel olduğundan $\vec{a}$ vektoru bu düz xəttə paralel deyil. $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarını M_0 nöqtəsindən ayıraq: $\overrightarrow{M_0M_1} = \vec{a}$ və $\overrightarrow{M_0M_2} = \vec{b}$. Sərhəddi d düz xətti olan və M_1 nöqtəsini özündə saxlayan yarımmüstəvini λ ilə işarə edək (şək. 22).



Şəkil 4

Aşkardır ki, $M(x, y)$ nöqtəsi yalnız və yalnız $\vec{a}, \vec{b}$ və $\overrightarrow{M_0M}, \vec{b}$ bazislərinin oriyentasiyaları eyni olduqda, yəni $\overrightarrow{M_0M}, \vec{b}$ bazisi sağ oriyentasiyaya malik olduqda λ yarımmüstəvisi üzərində yerləşir. Digər tərəfdən, $\overrightarrow{M_0M}(x - x_0, y - y_0)$ və $\vec{b}(-B, A)$ oldu-ğundan $\overrightarrow{M_0M}, \vec{b}$ bazisi yalnız və yalnız $\begin{vmatrix} x - x_0 & -B \\ y - y_0 & A \end{vmatrix} > 0$ və ya $Ax + By - (Ax_0 + By_0) > 0$ bərabərsizliyi ödənildikdə sağ oriyentasiyaya malik olur. $M_0 \in d$ olduğundan, $Ax_0 + By_0 + C = 0$ və ya $C = -(Ax_0 + By_0)$. Ona görə də yuxarıdakı bərabərsizlik bu şəkildə yazılır:

$$Ax + By + C > 0. \tag{11}$$

(11) - λ yarımmüstəvisini təyin edən bərabərsizlikdir. Sər-həddi d düz xətti olan digər λ' yarımmüstəvisi isə

$$Ax + By + C < 0 \tag{12}$$

bərabərsizliyi ilə təyin olunur.

Beləklə, aşağıdakı teorem doğrudur.

Teorem 2. *Əgər afin koordinat sistemində d düz xətti* (9) *tənliyi ilə verilmişdirsə, onda sərhəddi d düz xətti olan yarımmüstəvilər* (11) *və* (12) *bərabərsizlikləri ilə təyin olunurlar.*

VIII Mühazirə

Müstəvi üzərində iki düz xəttin qarşılıqlı vəziyyəti. Nöqtədən düz xəttə qədər olan məsafə. İki düz xətt arasında qalan bucaq

1. Hansı şərtlər daxilində

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, \tag{1}$$
$$A_2x + B_2y + C_2 = 0 \tag{2}$$
tənliklərinin eyni bir düz xətti təyin etdiyini aydınlaşdıraq. Aşağıdakı teorem doğrudur.

Teorem 1. (1) *və* (2) *tənliklərinin afin koordinat sistemində eyni bir düz xətti təyin etməsi üçün zəruri və kafi şərt bu tənliklərdəki əmsalların mütənasib olmasıdır.*

İsbatı. Tutaq ki, (1) və (2) tənlikləri $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ afin koordinat sistemində eyni bir d düz xəttini təyin edirlər. § 7-dəki teorem 1-ə əsasən $\vec{a}_1(-B_1, A_1)$ və $\vec{a}_2(-B_2, A_2)$ vektorları d düz xəttinin yönəldici vektorlarıdır, ona görə də kolleneardırlar. Bu isə o deməkdir ki, $\vec{a}_1(-B_1, A_1)$ və $\vec{a}_2(-B_2, A_2)$ vektorlarının koordinatları mütənasibdir:

$$-B_2 = \lambda(-B_1), A_2 = \lambda A_1, \text{ və ya } A_2 = \lambda A_1, B_2 = \lambda B_1.$$

Tutaq ki, $M_0(x_0, y_0) - d$ düz xəttinin nöqtəsidir. Onda

$$A_1x_0 + B_1y_0 + C_1 = 0, \quad A_2x_0 + B_2y_0 + C_2 = 0.$$

Buradan $A_2 = \lambda A_1, B_2 = \lambda B_1$ şərtləri daxilində alırıq:

$$C_2 = \lambda(-A_1x_0 - B_1y_0) = \lambda C_1.$$

Beləliklə,

$$A_2 = \lambda A_1, B_2 = \lambda B_1, C_2 = \lambda C_1. \tag{3}$$

Tərsinə, tutaq ki, (1) və (2) tənliklərində əmsallar (3) bəra-bərliklərini ödəyirlər. Aşkardır ki, A_2 və B_2 əmsalları eyni vaxtda sıfra bərabər olmadığından, bu halda $\lambda \neq 0.$ Ona görə də (2) tənliyini

$$\lambda A_1x + \lambda B_1y + \lambda C_1 = 0 \tag{4}$$

şəklində yazmaq olar. Əgər nöqtənin (x, y) koordinatları (1) tən-liyini ödəyirlərsə, onda bu koordinatlar (4) tənliyini də ödəyirlər. Bu isə o deməkdir ki, (1) və (4) tənlikləri ilə eyni bir düz xətt təy■ olunur.

Müəyyən $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ afin koordinat sistemində (1) və (2) tənlikləri ilə verilmiş d_1 və d_2 düz xətlərinin qarşılıqlı vəziyyəti ilə bağlı məsələyə baxaq. Qeyd etdiyimiz kimi, $\vec{a}_1(-B_1, A_1)$ vektoru d_1 düz xəttinə, $\vec{a}_2(-B_2, A_2)$ vektoru isə d_2 düz xəttinə paraleldir. İki mümkündür.

1) $\vec{a}_1$ *və* $\vec{a}_2$ *kollinear olmayan vektorlardır.* Bu halda d_1 və d_2 düz xətləri kəsişirlər. Tərsinə, əgər d_1 və d_2 düz xətləri kəsişirlərsə, onda $\vec{a}_1$ və $\vec{a}_2$ kollinear olmayan vektorlardır. $\vec{a}_1$ və $\vec{a}_2$ vektorlarının kollinear olmaması şərti $\begin{vmatrix} -B_1 & -B_2 \\ A_1 & A_2 \end{vmatrix} \neq 0$, və ya $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$ şəklində yazmaq olar. Bu düz xətlərin kəsişmə nöqtəsinin koordinatlarını təyin etmək üçün (1) , (2) tənliklər sistemini həll etmək lazımdır.

2) $\vec{a}_1$ *və* $\vec{a}_2$ *vektorları kolleneardırlar.* Bu halda verilmiş düz xətlər paralel olur (bu düz xətlərin üst-üstə düşməməsi fərz edilir). Tərsinə, əgər d_1 və d_2 düz xətləri paraleldirlərsə, onda $\vec{a}_1$ və $\vec{a}_2$ kollinear vektorlardır. $\vec{a}_1$ və $\vec{a}_2$ vektorlarının kollinearlıq şərti belə yazılır:

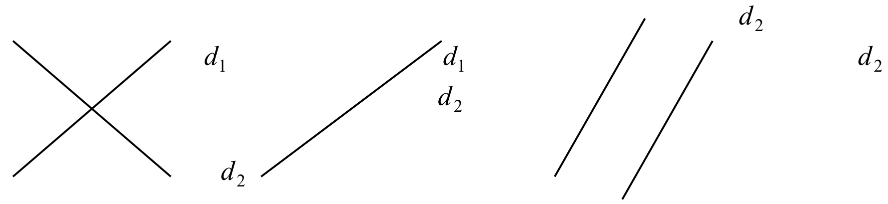
$$\begin{vmatrix} -B_1 & -B_2 \\ A_1 & A_2 \end{vmatrix} = 0, \text{ və ya } \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Beləliklə, (1) və (2) tənlikləri ilə verilmiş d_1 və d_2 düz xətlərinin qarşılıqlı vəziyyəti ilə bağlı aşağıdakı nəticəni qeyd edə bilərik:

a) d_1 və d_2 düz xətləri yalnız və yalnız (1) və (2) tənliklə-rində x və y dəyişənlərinin əmsalları mütənasib olduqda kəsişirlər (şək. 1, a).

b) d_1 və d_2 düz xəttləri yalnız və yalnız (1) və (2) tənliklə-rinin bütün əmsalları mütənasib olduqda, yəni müəyyən λ ədədi üçün $A_2 = \lambda A_1, B_2 = \lambda B_1, C_2 = \lambda C_1$ şərtləri ödənildikdə üst-üstə düşürlər (şək. 1, b).

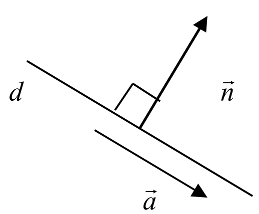
c) d_1 və d_2 düz xəttləri yalnız və yalnız (1) və (2) tənliklə-rində x və y dəyişənlərinin əmsalları mütənasib olduqda, lakin sərbəst əmsallar onlara mütənasib olmadıqda, yəni müəyyən λ ədədi üçün $A_2 = \lambda A_1, B_2 = \lambda B_1, C_2 \neq \lambda C_1$ şərtləri ödənildikdə paralel olurlar (şək. 24, c).



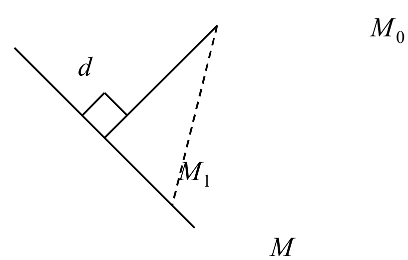
a) b) c)

Şəkil 1

2. Düz xəttin istənilən yönəldici vektoruna perpendikul-yar olan sıfırdan fərqli $\vec{n}$ vektoru bu düz xəttə *perpendikulyar olan vektor* adlanır (şək. 2). Verilmiş düz xəttə perpendikulyar olan sonsuz sayda vektorlar vardır. Aşağıdakı lemma doğrudur.



Şəkil 2



Şəkil 3

Lemma. *Əgər d düz xətti düzbucaqlı koordinat siste-mində*

$$Ax + By + C = 0 \tag{5}$$

tənliyi ilə verilmişdirsə, onda $\vec{n}(A,B)$ vektoru d düz xəttinə perpendikulyardır.

İsbatı. $\vec{a}(-B, A)$ vektoru d düz xəttinin yönəldici vek toru-dur. Lakin $\vec{a}\vec{n} = (-B)A + A \cdot B = 0$ olduğuna görə $\vec{n}$ və $\vec{a}$ vektorları qarşılıqlı perpendikulyardırlar. Buradan $\vec{n}$ vektorunun d düz xəttinə perpendikulyar ol■ası alınır.

Tutaq ki, $M_0 - d$ düz xəttinə aid olmayan nöqtədir. M_0 nöqtəsindən d düz xəttinə çəkilən M_0M_1 perpendikulyarının uzunluğu M_0 *nöqtəsindən d düz xəttinə qədər olan məsafə* adlanır (şək. 3). $M_0 \in d$ olduqda M_0 nöqtəsindən d düz xəttinə qədər olan məsafə sıfır qəbul edilir. Müstəvinin ixtiyari M_0 nöqtəsindən d düz xəttinə qədər olan məsafə $\rho(M_0, d)$ kimi işarə olunur. Aşkardır ki, d düz xəttinin istənilən M nöqtəsi üçün $\rho(M_0, d) \leq M_0M$ münasibəti doğrudur (şək. 3).

Tutaq ki, düzbucaqlı $O\vec{i}\vec{j}$ koordinat sistemində $M_0(x_0, y_0)$ nöqtəsi və (5) tənliyi ilə d düz xətti verilmişdir. $\rho(M_0, d)$ məsafəsini hesablayaq.

IX Mühazirə
Müstəvi üzərində düz xətlər dəstəsi, onun tənliyi

Tutaq ki, müstəvi üzərində $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ və $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ ümumi tənlikləri ilə d_1 və d_2 düz xətləri verilmişdir. d_1 və d_2 düz xətlərinin tənliklərinin sol tərəflərindən istifadə etməklə aşağıdakı tənliyi tərtib edək:

$$\lambda(A_1x + B_1y + C_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2) = 0 \ , \qquad (1)$$

burada λ, μ eyni vaxtda sıfra bərabər olmayan ixtiyari həqiqi ədədlərdir. (1) tənliyi ilə müəyyən d düz xətti təyin olunur. d_1 və d_2 düz xətlərinin qarşılıqlı vəziyyəti ilə bağlı aşağıdakı mümkün hallara baxaq.

1) Tutaq ki, d_1 və d_2 düz xətləri müəyyən $M_0(x_0, y_0)$ nüqtəsində kəsişirlər. Aşkardır ki, d düz xətti də $M_0(x_0, y_0)$ nüqtəsindən keçər. λ, μ dəyişənlərinə ixtiyari qiymətlər verməklə $M_0(x_0, y_0)$ nüqtəsindən keçən sonsuz sayda düz xətlər çoxluğunu alarıq. Bu çoxluğa müstəvi üzərində düz xətlərin məxsusi dəstəsi deyilir. $M_0(x_0, y_0)$ nüqtəsi isə bu düz xətlər dəstəsinin mərkəzi adlanır.

2) Tutaq ki, $d_1 // d_2$, yəni d_1 və d_2 düz xətləri paraleldirlər. Asanlıqla yoxlanılır ki, bu halda (1) tənliyi ilə təyin olunan d düz xətti d_1 və d_2 düz xətlərinin hər birinə parallel olur. Ona görə də λ, μ dəyişənlərinə ixtiyari qiymətlər verməklə d_1 və d_2 düz xətlərinin hər birinə parallel olan sonsuz sayda düz xətlər çoxluğunu alarıq. Bu çoxluğa müstəvi üzərində düz xətlərin qeyri-məxsusi dəstəsi deyilir.

(1) tənliyi düz xətlər dəstəsinin tənliyi adlanır. Müəyyənlik üçün, $\lambda \neq 0$ olduğunu qəbul edək. Onda (1) tənliyi

$$A_1x + B_1y + C_1 \quad + \lambda_1(A_2x + B_2y + C_2) = 0 \qquad (2)$$

şəklində yazılar, burada $\lambda_1 = \dfrac{\mu}{\lambda}$ işarə olunmuşdur.

(2) tənliyindən müəyyən edirik ki, düz xətlər dəstəsi birparametrli çoxluqdur.

Mühazirə 10

Ellips, kanonik tənliyi, xassələri

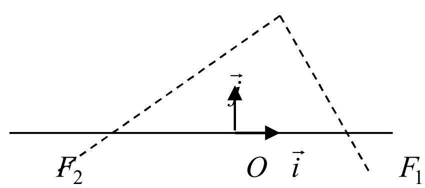
1. Müstəvi üzərində verilmiş F_1 və F_2 nöqtələrindən məsafələrinin cəmi $PQ > F_1F_2$ şərtini ödəyən verilmiş PQ parçasının uzunluğuna bərabər olan bütün nöqtələr çoxluğuna *ellips* deyilir.

F_1 və F_2 nöqtələrinə ellipsin *fokusları*, onlar arasındakı məsafəyə -*fokal məsafə* deyilir.

Əgər $M-$ellipsin nöqtəsidirsə, onda F_1M və F_2M parçaları M nöqtəsinin *fokal radiusları* adlanır. F_1M və F_2M parçalarının uzunluqlarına da M nöqtəsinin fokal radiusları deyilir. Tutaq ki, $F_1F_2 = 2c, PQ = 2a.$ $PQ > F_1F_2$ olduğundan, $a > c.$

Ellipsin tərifindən aydın olur ki, F_1 və F_2 nöqtələri üst-üstə düşdükdə ellips a radiuslu çevrə olur. Bu halda ellipsin fokusları çevrənin mərkəzi ilə üst-üstə düşürlər.

Düzbucaqlı $O\vec{i}\vec{j}$ koordinat sistemində γ ellipsinin tənli-yini yazaq, burada $O-F_1F_2$ parçasının orta nöqtəsidir və $\vec{i}\uparrow\uparrow\overrightarrow{OF_1}$ (şək. 28). Seçilmiş koordinat sistemində F_1 və F_2 fokuslarının $F_1(c,0)$ və $F_2(-c,0)$ koordinatları vardır, ona görə də ellipsin ixtiyari $M(x,y)$ nöqtəsinin fokal radiuslarının aşağıdakı ifadələrini yaza bilərik:



Şəkil 28

$$F_1M = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}, \quad F_2M = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}. \qquad (1)$$

Ellipsin tərifinə görə, $F_1M + F_2M = 2a.$ Buradan aydın olur ki,

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a.$$

Bu tənliyi

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \qquad (2)$$

şəklində yazaq. (2) tənliyini kvadrata yüksəltsək və oxşar hədləri islah etsək, alarıq:

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - xc.$$

Bu tənliyi bir daha kvadrata yüksəldib sadə çevirmələr aparsaq, onu

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (3)$$

şəklinə gətirmiş olarıq, burada

$$b^2 = a^2 - c^2. \qquad (4)$$

Beləliklə, göstərdik ki, γ ellipsinin istənilən nöqtəsinin koordinatları (3) tənliyini ödəyirlər. Tərs hökmün doğruluğunu isbat edək: koordinatları (3) tənliyini ödəyən hər bir M nöqtəsi γ ellipsinə aiddir, yəni $F_1M + F_2M = 2a.$ (1) düsturlarında y^2- nın (3) tənliyindən olan qiymətini yerinə yazaq və (4) bərabərliyini nəzərə alaq:

$$F_1M = \sqrt{\left(a - \frac{c}{a}x\right)^2} = \left|a - \frac{c}{a}x\right|, \; F_2M = \sqrt{\left(a + \frac{c}{a}x\right)^2} = \left|a + \frac{c}{a}x\right|.$$

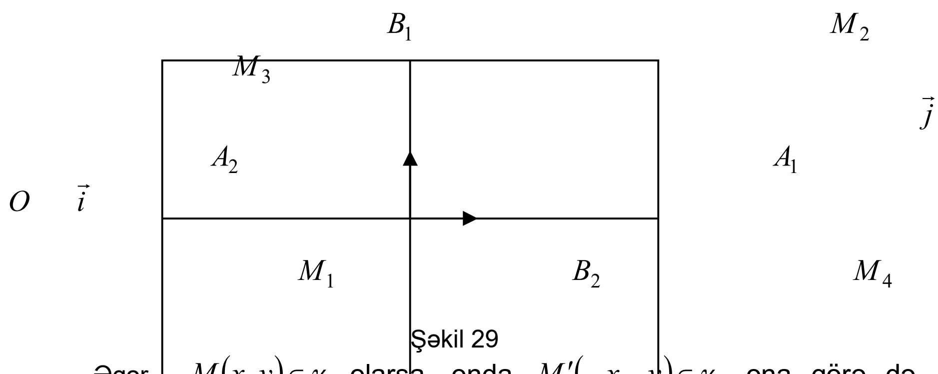
(3) tənliyindən alınır ki, $|x| \le a.$ Bu münasibət və $0 < \frac{c}{a} < 1$ şərti göstərir ki, $a - \frac{c}{a}x > 0, a + \frac{c}{a}x > 0,$ ona görə də

$$F_1M = a - \frac{c}{a}x, \quad F_2M = a + \frac{c}{a}x. \qquad (5)$$

Beləliklə, $F_1M + F_2M = 2a,$ yəni $M \in \gamma.$ Buradan belə bir nəticəyə gəlirik ki, (3) tənliyi ellipsin tənliyidir. Ona ellipsin *kanonok tənliyi* deyilir.

F_1 və F_2 fokusları üst-üstə düşdükdə, $c = 0$ olur, buradan (4) bərabərliyinə əsasən $a = b$ şərti alınır və (3) tənliyi $x^2 + y^2 = a^2$ şəklini alır. Bu tənliklə a radiuslu, mərkəzi koordinat başlanğıcında olan çevrə verilir. Bununla bir daha əmin oluruq ki, çevrə ellipsin xüsusi halıdır.

2. (3) kanonik tənliyindən γ ellipsinin həndəsi xassələrini öyrənmək üçün istifadə edək. Əgər $M(x,y)\in\gamma$ olarsa, onda x,y koordinatları (3) tənliyini ödəyirlər, ona görə də $x^2\le a^2, y^2\le b^2$. Buradan $-a\le x\le a, -b\le y\le b$ münasibətləri alınır, yəni ellipsin bütün nöqtələri şəkil 29-da təsvir olunan $M_1M_2M_3M_4$ düzbucaqlısına aid olurlar.



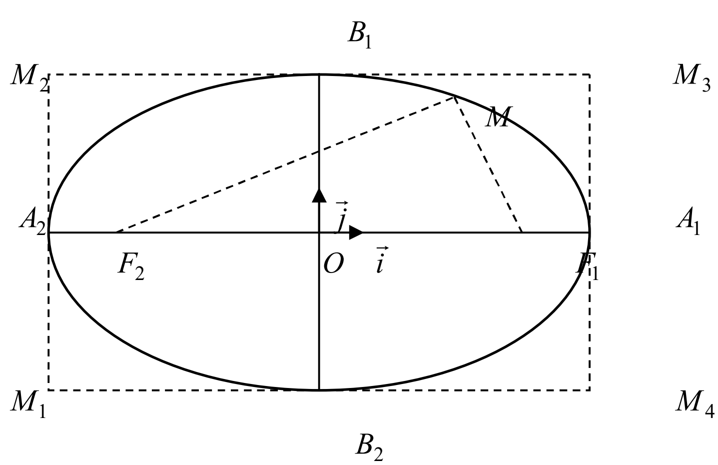
Şəkil 29

Əgər $M(x,y)\in\gamma$ olarsa, onda $M'(-x,-y)\in\gamma$, ona görə də O nöqtəsi ellipsin simmetriya mərkəzidir. Digər tərəfdən, əgər $M(x,y)\in\gamma$ olarsa, onda $M'(-x,y)\in\gamma$ və $M'(x,-y)\in\gamma$. Bura-dan görünür ki, Ox və Oy düz xəttləri ellipsin simmetriya oxlarıdır. İsbat etmək olar ki, çevrədən fərqli ellipsin digər simmetriya oxları yoxdur. Bu halda fokuslardan keçən düz xəttə ellipsin *birinci* , və ya *fokal simmetriya oxu* deyilir. Birinci simmetriya oxuna perpendikulyar olan ox *ikinci simmetriya oxu* adlanır. Simmetriya oxlarından hər biri ellipslə iki nöqtədə kəsişir: $A_1(a,0), A_2(-a,0), B_1(b,0), B_2(-b,0)$. Bu nöqtələrə ellipsin *təpələri* deyilir (şək. 29). A_1A_2 və B_1B_2 parçaları ellipsin, uyğun olaraq, *böyük* və *kiçik* oxları adlanırlar. Ellipsin O mərkəzi bu parçaların ümumi orta nöqtəsidir. Aşkardır ki, $OA_1=OA_2=a$, $OB_1=OB_2=b$. Bu ədədlərə ellipsin uyğun olaraq, *böyük və kiçik yarımoxları* deyilir.

(3) tənliyi ilə verilmiş ellipsin forması haqqında təsəvvür yaratmaq üçün ellipsin müəyyən nöqtələrini qurmaq lazımdır. Ellips koordinat oxlarına nəzərən simmetrik olduğundan, birinci koordinat rübündə yerləşən nöqtələrə baxılması yetərlidir. Birinci rübün ($x\ge 0, y\ge 0$) $M(x,y)$ nöqtəsi üçün (3) tənliyindən alarıq:

$$y=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}.$$

Bu bərabərlikdən görünür ki, M nöqtəsinin x absisinin $0-$ dan $a-$ya qədər artması zamanı y ordinatı $b-$dən $0-$a qədər azalır. Bu mülahizələrə əsasən ellipsin qrafikini şəkil 30-dakı kimi
qururuq:



Şəkil 30

3. $e=\dfrac{c}{a}$ ədədinə ellipsin *eksentrisiteti* deyilir. Tərifdən aydın olur ki, $0 \le e < 1$. Eksentrisitet yalnız və yalnız $c=0$ halında, yəni ellips çevrə olduqda sıfra bərabərdir.

Ellipsin formasının eksentrisitetdən necə asılı olduğunu aydın-laşdıraq. Bu məqsədlə $\dfrac{b}{a}$ nisbətini eksentrisitetlə ifadə edək:

$$c=ea, b^2=a^2-c^2=a^2-e^2a^2=a^2\left(1-e^2\right).$$

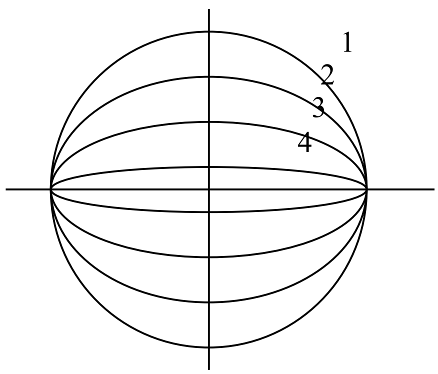
Buradan alırıq:

$$\frac{b}{a}=\sqrt{1-e^2}\,. \tag{6}$$

Böyük yarımoxları eyni, lakin eksentrisitetləri müxtəlif olan ellipslər sisteminə baxaq. (6) münasibəti göstərir ki, e eksentrisiteti böyük olduqca, b yarımoxu daha kiçik olur və bundan başqa, vahidə yaxınlaşan e eksentirisiteti üçün b ədədi sıfra yaxınlaşır. Bu münasibət həm də onu g.stərir ki, e eksentrisiteti kiçik olduqca, b yarımoxu daha böyük olur və sıfra bərabər olan e eksentirisiteti üçün $b=a$, yəni ellips çevrədir. Beləliklə, eksentrisitetin böyüməsi zamanı ellipsin «eni» kiçilir və o daha uzunsov şəkilli olur. Şəkil 31-də eksentrisitetləri

$$0=e_1<e_2<e_3<e_4$$

bərabərsizliklərini ödəyən ellipslər təsvir olunmuşdur:



Şəkil 31

Mühazirə 11

Hiperbola, kanonik tənliyi, xassələri

1. Müstəvi üzərində verilmiş F_1 və F_2 nöqtələrindən məsafələri fərqinin mütləq qiyməti $PQ<F_1F_2$ şərtini ödəyən verilmiş PQ parçasının uzunluğuna bərabər olan bütün nöqtələr çoxluğuna *hiperbola* deyilir.

F_1 və F_2 nöqtələri *hiperbolanın fokusları*, onlar arasındakı məsafə isə *fokal məsafə* adlanır. $F_1F_2>PQ>0$ şərtinə əsasən, hiperbolanın fokusları müxtəlif nöqtələrdir.

Əgər $M-$verilmiş hiperbolanın nöqtəsidirsə, onda F_1M və F_2M parçalarına M nöqtəsinin *fokal radiusları* deyilir. Bu parçaların uzunluqları da M nöqtəsinin fokal radiusları adlanır.

Tutaq ki, $F_1F_2=2c, PQ=2a$. $PQ<F_1F_2$ olduğundan, $a<c$.

Düzbucaqlı $O\vec{i}\vec{j}$ koordinat sistemində γ hiperbolasının tənliyini yazaq, burada $O-$ F_1F_2 parçasının orta nöqtəsidir və $\vec{i}\uparrow\uparrow\overrightarrow{OF_1}$. Bu koordinat sistemində F_1 və F_2 nöqtələrinin $F_1(c,0), F_2(-c,0)$ koordinatları vardır. Ona görə də M nöqtəsi-nin F_1M və F_2M fokal radiusları

$$F_1M = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}, \quad F_2M = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}. \qquad (1)$$

düsturları ilə hesablanır.

Hiperbolanın tərifinə görə $|F_1M - F_2M| = 2a$ olduğundan, (1) şərtləri daxilində yaza bilərik:

$$\left|\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right| = 2a.$$

Bu tənliyi

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \pm 2a \qquad (2)$$

şəklində yazaq. (2) tənliyinin kvadrata yüksəldib, oxşar həddləri islah etsək, alarıq:

$$\pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - xc.$$

Bu tənliyi bir daha kvadrata yüksəldib, zəruri çevirmələr aparsaq, onu

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (3)$$

şəklinə gətirmiş olarıq, burada

$$b^2 = c^2 - a^2. \qquad (4)$$

Beləliklə, isbat etdik ki, γ hiperbolasının istənilən nöqtə-sinin koordinatları (3) tənliyini ödəyirlər. Tərs hökmün doğruluğunu isbat edək: koordinatları (3) tənliyini ödəyən hər bir M nöqtəsi γ hiperbolasına aiddir, yəni $|F_1M - F_2M| = 2a$ bərabərliyini ödəyir. (1) düsturlarında $y^2 -$ nın (3) tənliyindən olan qiymətini yerinə yazaq və (4) bərabərliyini nəzərə alaq:

$$F_1M = \left|\frac{c}{a}x - a\right|, \; F_2M = \left|\frac{c}{a}x + a\right|.$$

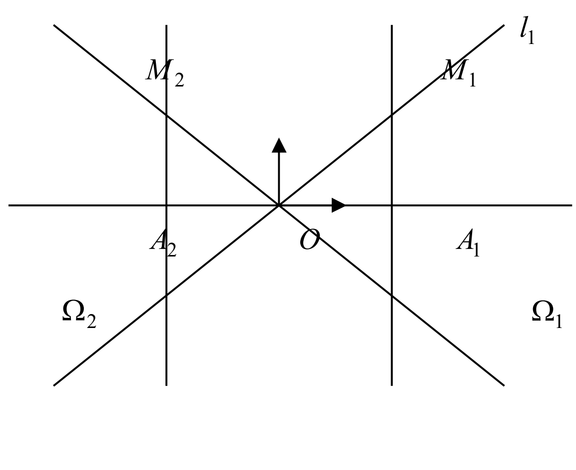
(3) tənliyindən alınır ki, $|x| \geq a$. Digər tərəfdən, $\frac{c}{a} > 1$ olduğuna görə aşağıdakılar doğrudur:

$x > 0$ olduqda, $F_1M = \frac{c}{a}x - a, \; F_2M = \frac{c}{a}x + a,$

$x < 0$ olduqda, $F_1M = -\frac{c}{a}x + a, \; F_2M = -\frac{c}{a}x - a.$

Buradan məlum olur ki, $|F_1M - F_2M| = 2a$, yəni $M \in \gamma$. Beləliklə, (3) tənliyi γ hiperbolasının tənliyidir. Bu tənlik hiperbolanı *kanonik tənliyi* adlanır.

2. (3) kanonik tənliyindən istifadə etməklə γ hiperbola-sının həndəsi xassələrini öyrənək. Əgər $M(x, y) \in \gamma$ olarsa, onda (x, y) cütü (3) tənliyini ödəyər, buradan $x^2 \geq a^2$ münasibəti alınır. Beləliklə, ya $x \geq a,$ ya da $x \leq -a.$ Bu isə o deməkdir ki, şəkil 33-də təsvir olunan A_1M_1 və A_2M_2 düz xəttlərinin əmələ gətirdikləri oblastın daxilində hiperbolanın nöqtələri yoxdur ($OA_1 = OA_2 = a$).



l_2

Şəkil 33

Ellips halına analoji qaydada isbat etmək olur ki, O nöqtəsi ellipsin simmetriya mərkəzidir, Ox və Oy düz xəttləri isə onun simmetriya oxlarıdır. Simmetriya mərkəzinə hiperbolanın *mərkəzi* deyilir. Fokuslardan keçən simmetriya oxu-*birinci* və ya *fokal simmetriya oxu,* ona perpendikulyar olan və mərkəzdən keçən ox isə *ikinci,* və ya *xəyali simmetriya oxu* deyilir.Fokal simmetriya oxu hiperbolanı iki nöqtədə- $A_1(a,0), A(-a,0)$ nöqtələrində kəsir. İkinci simmetriya oxu hiperbolanı kəsmir. A_1 və A_2 nöqtələrinə hiperbolanın *təpələri,* A_1A_2 parçasına isə onun *həqiqi oxu* deyilir. a və b ədədləri hiperbolanın uyğun olaraq, *həqiqi və xəyali yarımoxları* adlanır.

3. (3) kanonik tənliyi ilə verilmiş γ hiperbolasının O mərkəzindən keçən l düz xətti ilə bu hiperbolanın qarşılıqlı vəziyyətini araşdıraq. l düz xəttinin $O\vec{i}\vec{j}$ düzbucaqlı koordinat sistemində bucaq əmsallı $y = kx$ tənliyi ilə verildiyini qəbul edək. y dəyişəninin qiymətini (3) tənliyinidə yerinə yazıb, zəruri elementar çevirmələr aparsaq, alarıq:

$$x^2\left(b^2 - k^2a^2\right) = a^2b^2. \tag{5}$$

(5) tənliyinin kökləri l düz xətti ilə γ hiperbolasının kəsişmə nöqtələrinin absisləridir.

$a)$ Əgər $b^2 - k^2a^2 > 0$ olarsa, onda l düz xəttinin γ hiperbolası ilə iki ortaq nöqtəsi vardır:

$$M_1\left(\frac{ab}{\sqrt{b^2 - k^2a^2}}, \frac{kab}{\sqrt{b^2 - k^2a^2}}\right), M_2\left(\frac{-ab}{\sqrt{b^2 - k^2a^2}}, \frac{-kab}{\sqrt{b^2 - k^2a^2}}\right).$$

$b)$ Əgər $b^2 - k^2a^2 < 0$ olarsa, onda (5) tənliyinin xəyali kökləri vardır, yəni l düz xətti γ hiperbolasını kəsmir.

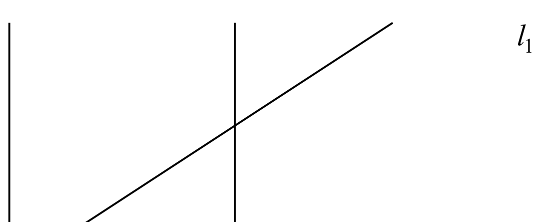
$c)$ Əgər $b^2 - k^2a^2 = 0$ olarsa, onda (5) tənliyinin həlləri yoxdur, yəni bu halda da l düz xətti γ hiperbolası ilə ortaq nöqtələrə malik deyildir.

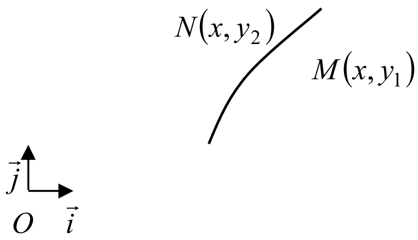
Beləliklə, belə bir nəticəyə gəlirik ki, $y = kx$ düz xətti (3) hiperbolasını yalnız və yalnız $b^2 - k^2a^2 > 0$, yəni $-\frac{b}{a} < k < \frac{b}{a}$ olduqda kəsir. $k = tg\alpha$ olduğundan, $-\frac{b}{a} < tg\alpha < \frac{b}{a}$, burada $\alpha - l$ düz xəttinin Ox oxu ilə əmələ gətirdiyi bucaqdır. Deməli, hiperbolanı bütün nöqtələri qarşılıqlı bucaqların şəkil 33-də ştrixlənən daxili oblastlarında yerləşirlər. Beləliklə, hiperbolanın iki qanadı vardır: onlardan biri Ω_1 oblastında yerləşir (sağ qanad), digəri isə Ω_2 oblastında yerləşir (sol qanad). Aydındı ki, bu qanadlar hiperbolanın simmetriya mərkəzinə və simmetriya oxlarına nəzərən simmetrikdirlər.

4. O mərkəzindən keçən l düz xətti ilə γ hiperbolasının qaprşılıqlı vəziyyətinin $b^2 - k^2a^2 = 0$ bərabərliyi ilə müəyyən olunan halına bir daha nəzər yetirək. Qeyd etdiyimiz kimi, bu halda (5) tənliyinin həlləri yoxdur. Bu hala bucaq əmsalları $k_1 = \frac{b}{a}$ və $k_2 = -\frac{b}{a}$ olan l_1 və l_2 düz xəttləri uyğundur. Bu düz xəttlər *hiperbolanın asimptotları* adlanır (bax şək.33).

Hiperbolanın qanadlarının asimptotlara nəzərən hansı vəziyyətdə yerləşdiklərini aydınlaşdıraq. Tutaq ki, $M(x, y_1)-$ hiperbolanın birinci rübdə $(x > 0, y \geq 0)$ yerləşən ixtiyari nöqtəsidir, $N(x, y_2) - y = \frac{b}{a}x$ tənliyi ilə verilən asimptotun nöqtəsidir (şək.34). MN parçasının uzunluğunu tapaq:

$$MN = |y_2 - y_1| = \frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} = \frac{b}{a}\left(x - \sqrt{x^2 - a^2}\right)$$



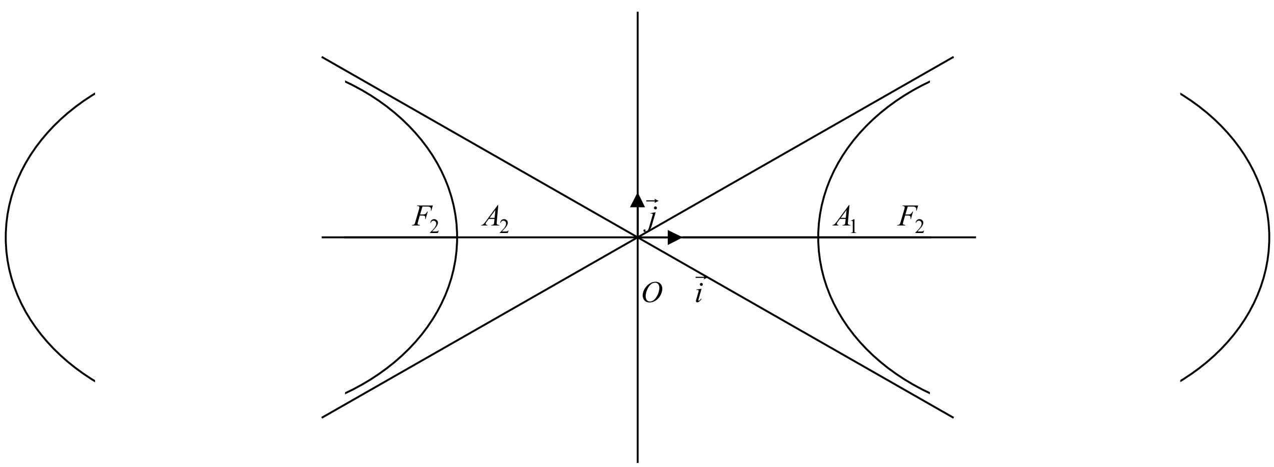


Şəkil 34

Buradan surət və məxrəci $x+\sqrt{x^2-a^2}$ ifadəsinə vurmaqla alırıq:

$$MN = \frac{1}{x+\sqrt{x^2-a^2}}.$$

Hiperbolanın M nöqtəsinin x absisinin qeyri-məhdud olaraq artması zamanı MN parçasının uzunluğu monoton azalaraq, sıfra yaxınlaşır, yəni M nöqtəsi qeyri-məhdud olaraq, asimptota yaxınlaşır. Bu xassə hiperbolanın asimptotlara nəzərən yerləşməsinə dair əyani təsəvvür yaradır. Şəkil 35-də hiperbola asimptotları ilə təsvir olunmuşdur.



Şəkil 35

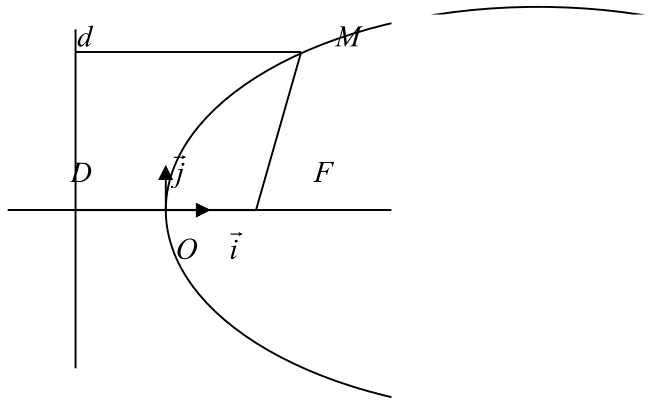
5. $e=\frac{c}{a}$ ədədi hiperbolanın *eksentrisiteti* adlanır. $c > a$ olduğundan, hiperbolanın eksentrisiteti vahiddən kiçikdir. Hiperbolanın formasının eksentrisitetdən necə asılı olduğunu aydınlaşdıraq. (4) düsturundan alırıq: $\frac{b}{a}=\sqrt{e^2-1},$ və ya $tg\alpha=\sqrt{e^2-1},$ burada $\alpha-$ absis oxu ilə asimptot arasında qalan bucaqdır. Beləliklə, eksentrisitet nə qədər böyükdürsə, α bucağı da bir o qədər böyükdür, yəni hiperbola özünün xəyali oxu boyunca bir o qədər «dartılmışdır».

Mühazirə 12

Parabola, kanonik tənliyi, xassələri. Ellips, hiperbola və parabolanın polyar koordinat sistemində tənliyi

Parabola müstəvinin elə nöqtələrinin çoxluğuna deyilir ki, bu nöqtələrdən hər birinin verilmiş F nöqtəsinə qədər olan məsafəsi F nöqtəsindən keçməyən verilmiş d düz xəttinə qədər olan məsafəsinə bərabərdir.

F nöqtəsi parabolanın *fokusu,* d düz xətti isə *direktrisi* adlanır. Fokusdan direktrisə qədər olan məsafəyə fokal parametr deyilir və p ilə işarə olunur. Aşkardır ki, $p = FD$, burada $D-$ F nöqtəsinin d düz xətti üzərində proyeksiyasıdır (şək. 36).



Şəkil 36

$O\vec{i}\vec{j}$ düzbucaqlı koordinat sistemində γ parabolasının tənliyini çıxaraq, burada $O-DF$ parçasının orta nöqtəsidir və $\vec{i}\uparrow\uparrow\overrightarrow{OF}$. Bu koordinat sistemində F nöqtəsinin $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ koordinatları, d direktrisinin isə $x+\frac{p}{2}=0$ tənliyi vardır. Tutaq ki, $M(x,y)-$ müstəvinin ixtiyari nöqtəsidir. MF və $\rho(M,d)$ məsafələrini hesablayaq:

$$MF = \sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2 + y^2}, \ \rho(M,d) = \left|x+\frac{p}{2}\right|. \qquad (1)$$

Əgər $M \in \gamma$ olarsa, onda $MF = \rho(M,d)$, ona görə də

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \left|x+\frac{p}{2}\right|.$$

Hər iki tərəfi kvadrata yüksəltsək, alarıq:

$$y^2 = 2px. \qquad (2)$$

Beləliklə, isbat olundu ki, γ parabolasının istənilən nöqtəsinin koordinatları (2) tənliyini ödəyirlər. Bu hökmün tərsini isbat edək: koordinatları (2) tənliyini ödəyən hər bir M nöqtəsi γ parabolasına aiddir,yəni $MF = \rho(M,d)$.

(1) düsturlarından birincisində y^2-nın (2)-dən olan qiymətini yerinə yazsaq, alarıq:

$$MF = \sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2 + 2px} = \sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2} = \left|x+\frac{p}{2}\right|.$$

Buradan görünür ki, $MF = \rho(M,d)$, yəni $M \in \gamma$.

(2) tənliyinə parabolanın *kanonik tənliyi* deyilir.

2. γ parabolasının həndəsi xassələrini öyrənmək üçün onun (2) kanonik tənliyindən istifadə edək. (2) tənliyindən alınır ki, γ parabolasının nöqtələri $x \geq 0$ yarımmüstəvisinə aiddirlər. Əgər $M(x,y) \in \gamma$ olarsa, onda $M'(x,-y) \in \gamma$, yəni OF düz xətti parabolanın simmetriya oxudur. Simmetriya oxunun parabola ilə O kəsişmə nöqtəsinə parabolanın *təpəsi* deyilir.

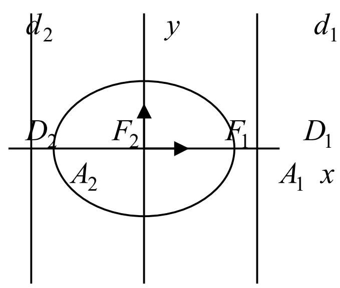
Seçilmiş koordinat sisteminin oxlarının parabola ilə bir ortaq nöqtəsi vardır-O təpə nöqtəsi. İsbat edək ki, O nöqtəsindən keçən istənilən digər l düz xətti parabolanı iki nöqtədə kəsir. Doğrudan da, $y-$in l düz xəttinin bucaq əmsallı $y=kx$ tənliyindən olan qiymətini (2) kanonik tənliyində yerinə yazsaq, alarıq: $k^2x^2=2px,$ və ya $\left(k^2x-2p\right)x=0.$ $k\neq 0$ olduqda l düz xəttinin parabola ilə iki ortaq nöqtəsi vardır: $O(0,0)$ və $M\left(\frac{2p}{k^2},\frac{2p}{k}\right)$.

Əgər $M(x,y)$ nöqtəsi parabola üzrə x absisinin qeyri – məhdud olaraq artması şərti daxilində yerini dəyişirsə, onda (2) tənliyindən göründüyü kimi, $|y|$ də qeyri-məhdud olaraq artır. Parabola şəkil 36-da təsvir olunmuşdur. Göstərmək olur ki, parabolanın fokal parametri böyük olduqca, parabola Oy oxu boyunca daha çox «dartılır».

3. Ellipsin (hiperbolanın) *direktrisləri* ikinci oxa paralel olan və ondan $\frac{a}{e}$ məsafəsində yerləşən iki düz xəttə deyilir, burada $a-$böyük (həqiqi) yarım oxdur, $e-$eksentrisitetdir. Çevrə üçün $e=0$ olduğundan, çevrənin direktrisləri yoxdur.

Ellipsin (hiperbolanın) direktrislərini d_1 və d_2 ilə işarə edirik, həm də indeksləri elə seçirik ki, birinci $F_1(c,0)$ fokusu və ona uyğun olan d_1 direktrisi ikinci koordinat oxundan bir tərəfdə, ikinci $F_2(-c,0)$ fokusu və ona uyğun olan d_2 direktrisi isə digər tərəfdə yerləşsin.

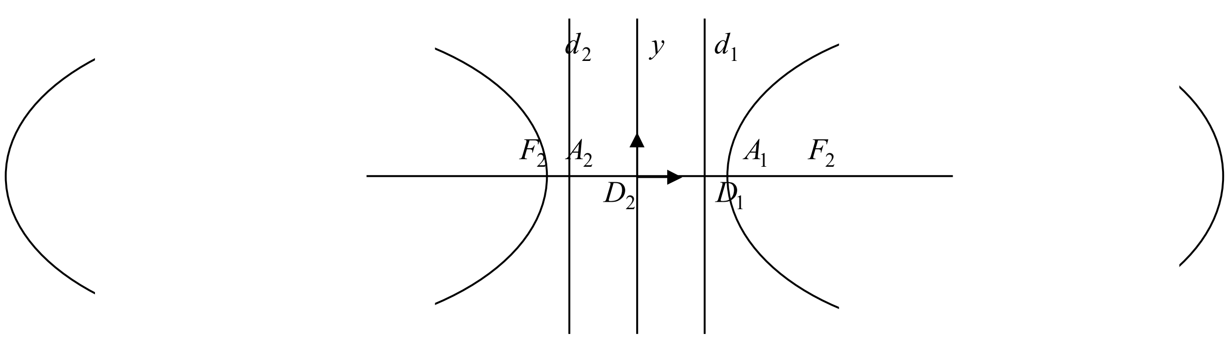
İsbat edək ki, ellipsin direktrislərinin onun A_1A_2 böyük oxu ilə ortaq nöqtələri yoxdur, ona görə direktrislər ellipsi kəsmirlər (şək. 37). Doğrudan da, tutaq ki, D_1 və D_2-d_1 və d_2 direktrislərinin ellipsin fokal oxu ilə kəsişmə nöqtələridir. Onda $OA_1=OA_2=a, OD_1=OD_2=\frac{a}{e}=\frac{a^2}{c}.$ $c<a$ olduğundan, $OA_1<OD_1$ və $OA_2<OD_2$. Buradan alınır ki, A_1 və A_2 nöqtələri



Şəkil 37

D_1D_2 parçasına daxildirlər və ona görə də d_1 və d_2 direktrislə-rinin $A_1\,A_2$ parçası ilə ortaq nöqtələri yoxdur.

Analoji qayda ilə isbat etmək olur ki, hiperbolanın direktrisləri onun həqiqi oxunu kəsirlər, ona görə də hiperbolanın direktrisləri onun iki qanadının arasında yerləşirlər və bu qanadları kəsmirlər (şək.38).



Şəkil 38

Teorem. *Ellips (hiperbola) müstəvinin elə γ' nöqtələri çoxluğudur ki, bu nöqtələrdən hər birinin fokusa qədər olan məsafəsinin həmin nöqtədən uyğun direktrisə qədər olan məsafəyə nisbəti eksentrisitetə bərabərdir.*

İsbatı. Qeyd edək ki, bu teoremdə faktiki olaraq iki hökm verilmişdir. Onlardan biri ellipsə, digəri isə hiperbolaya aiddir. Hiperbolaya aid olan hökmün doğruluğu ellipsdə olduğu kimi yoxlandığından, yalnız ellipsə aid olan hökmü isbat edək.

Tutaq ki, $\gamma -$ verilmiş ellipsdir, F_1 sağ fokusdur, d_1 isə ona uyğun olan birinci direktrisdir. Kanonik koordinat sistemində F_1 nöqtəsinin $(c,0)$ koordinatları, d_1 düz xəttinin $x-\frac{a}{e}=0$ tənliyi vardır. Ona görə də əgər $M(x,y)-$ müstəvinin nöqtəsidirsə, onda

$$\rho(M,d_1)=\left|x-\frac{a}{e}\right|, \quad MF_1=\sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

Əgər $M\in\gamma'$ olarsa, onda $\sqrt{(x-c)^2+y^2}=e\left|x-\frac{a}{e}\right|$.Bu tənliyi kvadrata yüksəltməklə, alarıq:

$$(x-c)^2+y^2=(ex-a)^2 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Bu isə o deməkdir ki, $M\in\gamma$.

Tərsinə, tutaq ki, $M(x,y)\in\gamma$. § 9-kı (5) düsturlarından birincisinə görə, $MF_1=a-ex.$ Digər tərəfdən,

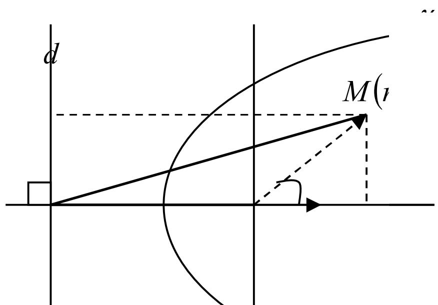
$$\rho(M,d_1)=\left|x-\frac{a}{e}\right|=\frac{a-ex}{e},$$

ona görə də $MF_1=e\rho(M,d_1)$, yəni $M\in\gamma'$. Beləliklə, γ' çoxluğu γ ellipsi ilə üst-üstə düşür.

Bu teorem ellips və ya hip[redacted]olanın eksentrisitetinin həndəsi mənasını izah edir: ellipsin və ya hiperbolanın eksentrisiteti elə bir sabit ədəddir ki, xəttin hər bir nöqtəsindən fokusa qədər olan məsafənin həmin nöqtədən uyğun direktrisə qədər olan məsafəyə nisbəti bu sabit ədədə bərabərdir. Parabolanın tərifindən məlum olur ki, onun nöqtələri analoji xassəyə malikdir-lər, yəni parabolanın hər bir nöqtəsinin fokusdan olan məsafəsi-nin həmin nöqtənin direktrisdən olan məsafəsinə nisbəti sabitdir və vahidə bərabərdir. Ona görə də *vahid istənilən parabolanın eksentrisiteti adlanır.*

γ ilə ya çevrədən fərqli ellipsi, ya hiperbolanın bir qanadını, ya da parabolanı işarə edək. Tutaq ki, F və d - γ xəttinin fokusu və direktrisidir, belə ki, γ xətti ellips olduqda F onun fokuslarından biridir, d isə uyğun direktrisdir, γ xətti hiperbolanın qanadlarından biri olduqda isə F və d - ikinci simmetriya oxuna nəzərən γ hiperbolasının qanadının yerləş-diyi yarımmüstəvidə yerləşən fokus və direktrisdir. Aşkardır ki, γ xətti bütün nöqtələri ilə sərhəddi d direktrisi olan və F fokusunun yerləşdiyi λ yarımmüstəvisində yerləşir. İsbat etdiyi-miz teoremi (bax, bənd 3) və parabolanın tərifini nəzərə alaraq, belə bir nəticəyə gəlirik: *γ xətti λ yarımmüstəvisinin $FM=e\rho(M,d)$ bərabərliyini ödəyən bütün M nöqtələrinin çoxluğudur, burada $e-\gamma$ xəttinin eksentrisitetidir.*

F fokusunun polyus olduğu və $\frac{\overrightarrow{DF}}{DF}=\vec{i}$ şərtini ödəyən $F\vec{i}$ polyar koordinat sistemində γ xəttinin tənliyini çıxaraq, burada $D-F$ nöqtəsinin d düz xəttinin üzərinə proyeksiyasıdır (şək. 39). Əvvəlcə $\rho(M,d)$ məsafəsini hesablayaq, burada



φ

D F $\vec{i}$

Şəkil 39

$M(r,\varphi)-$ müstəvinin ixtiyari nöqtəsidir. Əgər $M_1 - M$ nöqtəsi-nin FD düz xətti üzərində proyeksiyasıdırsa, onda

$$\rho(M,d) = DM_1 = DM \cdot \cos \widehat{MDF} = \overrightarrow{DM} \cdot \vec{i},$$

(bax, şək. 39). Lakin $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{FM}$, ona görə də

$$\rho(M,d) = \left(\overrightarrow{DF} + \overrightarrow{FM}\right) \cdot \vec{i} = \overrightarrow{DF} \cdot \vec{i} + \overrightarrow{FM} \cdot \vec{i} = DF + r\cos\varphi.$$

$M(r,\varphi)$ nöqtəsi yalnız və yalnız $FM = e\rho(M,d)$ və ya $r = e(DF + r\cos\varphi)$ olduqda γ xəttinə aid olur. Əgər $p = eDF$ işarə etsək, buradan alarıq:

$$r(1 - e\cos\varphi) = p,$$

və ya

$$r = \frac{p}{1 - e\cos\varphi} \ . \tag{3}$$

(3) tənliyi γ xəttinin (yəni ellipsin, hiperbolanın bir qanadının və ya parabolanın) polyar koordinatlarla tənliyidir. Bu tənlik $e < 1$ olduqda ellips, $e = 1$ olduqda parabolanı, $e > 1$ olduqda isə hiperbolanı təyin edir. p ədədi *fokal parametr* adlanır. Bu termin parabolanın fokal parametri ilə tamamilə uzlaşır. Doğrudan da, əgər γ xətti paraboladırsa, onda $e = 1$, ona görə də $p = DF$.

$DF-$ fokusdan uyğun direktrisə qədər olan məsafə olduğundan, ellips və ya hiperbola halında yaza bilərik:

$$DF = \left|\frac{a}{e} - c\right| = \frac{|a - ec|}{e}. \tag{4}$$

p fokal parametrinin ifadəsində (4) bərabərliyini nəzərə alaq:

$$p = e \cdot DF = |a - ec| = \left|a - \frac{c^2}{a}\right| = \frac{\left|a^2 - c^2\right|}{a}. \tag{5}$$

Əgər γ xətti ellipsdirsə, onda $\left|a^2 - c^2\right| = a^2 - c^2 = b^2$. Digər tərəfdən, əgər γ xətti hiperbolanın bir qanadıdırsa, onda

$$\left|a^2 - c^2\right| = c^2 - a^2 = b^2.$$

Beləliklə, (5) bərabərliyindən göründüyü kimi, hər iki halda

$$p = \frac{b^2}{a}. \tag{6}$$

Mühazirə 13

İkitərtibli xəttin ümumi tənliyi. İkitərtibli xəttin düz xətlə kəsişməsi

1. Əvvəlcə müstəvi üzərində nöqtə anlayışını genişlən-dirək, daha dəqiq desək, müstəvini xəyali nöqtələr adlandırılan nöqtələrlə tamamlayaq. Seçilmiş $O\vec{i}\vec{j}$ koordinat sistemində nöqtə dedikdə müəyyən nizamla verilmiş (x, y) ədədlər cütünü başa düşəcəyik, burada $(x, y) \in C^2, C -$ kompleks ədədlər çoxluğudur. x və y həqiqi ədələr olduqda nöqtə *həqiqi* , onlardan heç olmazsa biri kompleks ədəd olduqda isə *xəyali nöqtə* adlandırı-lır. Məsələn, $A(3,-4)$ nöqtəsi həqiqi, $B(4i,-6)$ nöqtəsi isə xəyali nöqtədir. Bütün həqiqi və xəyali nöqtələrin çoxluğuna *kompleks müstəvi* deyilir. Verilmiş $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ nöqtələri bu nöqtələrin uyğun koordinatları kompleks-qoşma ədədlər olduqda *kompleks-qoşma nöqtələr* adlanırlar. Məsələn, $A(1-i, 4+5i)$ və $B(1+i, 4-5i)$ nöqtələri kompleks-qoşma nöqtələrdir.

2. Müstəvi üzərində hər hansı afin koordinat sistemində

$$F(x, y) = 0 \qquad (1)$$

tənliyi ilə verilə bilən xəttə *cəbri xətt* deyilir, burada $F(x, y) - \; x, y$ dəyişənlərindən asılı olan çoxhədlidir. $F(x, y)$ çoxhədlisinin dərəcəsi (1) tənliyi ilə təyin olunan xəttin *tərtibi* adlanır. Bir tərtibli xəttlərə misal olaraq düz xətti göstərmək olar (bax, IV fə-sil, § 7).

Cəbri xəttin tərifindən aydın olur ki, müstəvi üzərində $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ afin koordinat sistemində ikitərtibli xəttin ümumi tənliyini

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0 \qquad (2)$$

şəklində yazmaq olar.

(2) tənliyinin əmsalları ixtiyari həqiqi ədədlərdir, belə ki, a_{11}, a_{12}, a_{22} əmsalları eyni vaxtda sıfra bərabər olmurlar.

a_{12}, a_{10}, a_{20} əmsallarını bəzi hallarda a_{21}, a_{01}, a_{02} kimi də işarə edəcəyik.

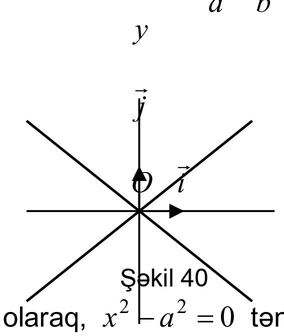
Aşağıdakı kimi qısaldılmış işarələmələr daxil edək:

$$F(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00},$$
$$F_1(x, y) = a_{11}x + a_{12}y + a_{10},$$
$$F_2(x, y) = a_{21}x + a_{22}y + a_{20},$$
$$F_0(x, y) = a_{10}x + a_{20}y + a_{00}.$$

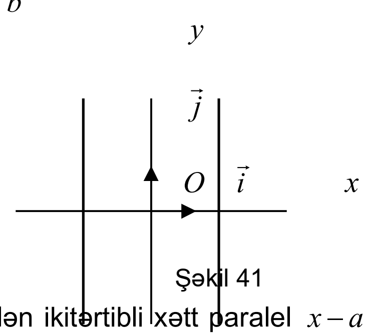
Bu işarələmələrdən istifadə edərək, (2) tənliyini qısaldılmış şəkil-də belə yazmaq olar: $F(x, y) = 0,$ və ya

$$F_1(x, y)x + F_2(x, y)y + F_0(x, y) = 0 . \qquad (3)$$

Xassələrini öyrəndiyimiz ellips, hiperbola və parabola iki tərtibli xəttlərin ayrı-ayrı nümunələridir. İkitərtibli xəttlərə dair digər nümunələrlə tanış olaq. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ tənliyi ilə verilən γ xətti ikitərtibli xəttdir. Bu tənliyi $\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 0$ şəklində yazmaq olar. Bu halda deyirlər ki, γ xətti bir cüt kəsişən $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$ və $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$ düz xəttlərinə parçalanır. (şək.40). Ana-



Şəkil 40



Şəkil 41

loji olaraq, $x^2 - a^2 = 0$ tənliyi ilə verilən ikitərtibli xətt paralel $x - a = 0$ və $x + a = 0$ düz xəttlər cütünə parçalanır, burada $a \neq 0$ (bax, şək. 41). Bu ikitərtibli xətlərin hər birinə daxil olan sonsuz sayda həqiqi və xəyali nöqtələr vardır. Lakin belə xassəyə malik olmayan ikitərtibli xətlər də vardır. Məsələn, $x^2+y^2=0$ tənliyi ilə təyin olunan ikitərtibli xəttin bir həqiqi $(0,0)$ nöqtəsi və sonsuz sayda xəyali nöqtələri vardır, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+1=0$ xəttinin isə həqiqi nöqtələri yoxdur, yəni onun bütün nöqtələri xəyali nöqtələrdir.

3. Tutaq ki, ikitərtibli γ xətti afin koordinat sistemində

$$F(x,y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{10}x+2a_{20}y+a_{00}=0 \qquad (4)$$

ümumi tənliyi ilə, l düz xətti isə

$$x=x_0+p_1t, \quad y=y_0+p_2t \qquad (5)$$

parametrik tənlikləri ilə verilmişdir.

l düz xətti ilə γ xəttinin kəsişmə nöqtələrini tapaq. x və y dəyişənlərinin (5) tənliklərindən olan qiymətlərini (4) tənliyində yerinə yazsaq, zəruri çevirmələrdən sonra alarıq:

$$Pt^2+2Qt+R=0, \qquad (6)$$

burada

$$P=a_{11}{p_1}^2+2a_{12}p_1p_2+a_{22}{p_2}^2,$$
$$Q=F_1(x_0,y_0)p_1+F_2(x_0,y_0)p_2,$$
$$R=F(x_0,y_0).$$

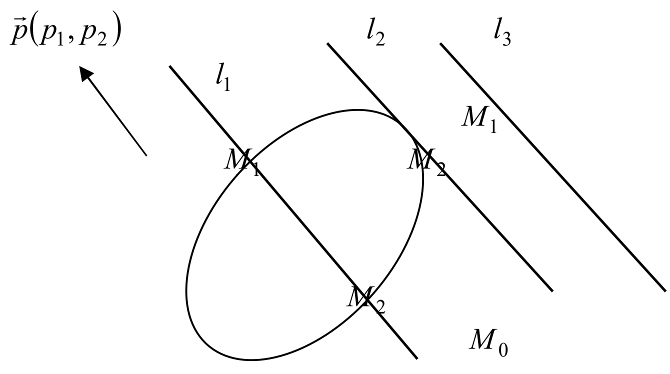
(6) tənliyindən kəsişmə nöqtələrinin t_1,t_2 parametrlərini təyin edib, onları (5) tənliklərində yerinə yazmaqla kəsişmə nöqtələrinin koordinatlarını tapmış oluruq. Qeyd edək ki, (6) tən-liyinin hər bir kökünə kəsişmə nöqtəsi uyğundur, belə ki, müxtəlif köklərə müxtəlif nöqtələr uyğundur: həqiqi köklərə-həqiqi nöqtələr və kompleks köklərə-xəyali nöqtələr.

(6) tənliyini tədqiq edək. İki hal mümkündür:

1) $P\neq 0$. (6) tənliyinin iki vardır:

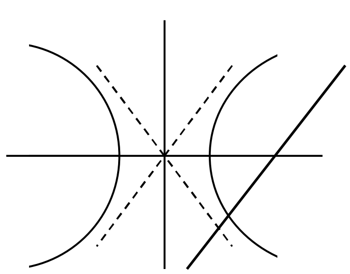
$$t_1=\frac{-Q+\sqrt{\delta}}{P},\ t_2=\frac{-Q-\sqrt{\delta}}{P},$$

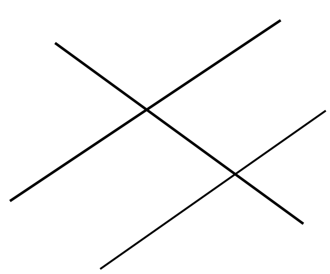
burada $\delta=Q^2-PR$ -(6) tənliyinin diskriminantıdır. l düz xətti γ xəttini $\delta>0$ olduqda iki müxtəlif həqiqi, $\delta<0$ olduqda kompleks-qoşma, $\delta=0$ olduqda isə üst-üstə düşən həqiqi M_1 və M_2 nöqtələrində kəsir. Şəkil 42-də l_1 düz xətti $\delta>0$ halına, l_2 düz xətti $\delta=0$ halına, l_3 düz xətti isə $\delta<0$ halına uyğundur.



Şəkil 42

2) $P=0$. (6) tənliyi belə bir şəklə gəlir: $2Qt+R=0.$ $Q\neq 0$ olduqda l düz xətti γ xəttini bir nöqtədə kəsir (şək. 43-də və ya şək. 44-də l düz xətti). $Q=0, R\neq 0$ olduq-





l l

Şəkil 43 Şəkil 44

da l düz xətti γ xətti ilə heç bir ortaq nöqtəyə (həqiqi və ya xəyali) malik olmur. $Q=0, R=0$ olduqda isə istənilən t (6) tənliyini ödədiyindən, $l \subset \gamma$ olur.

Beləliklə, *l düz xətti ilə γ ikitərtibli xəttinin qarşılıqlı vəziyyətinin altı halı* mümkündür:

$P \neq 0,$
- $\delta > 0$ – iki həqiqi kəsişmə nöqtələri vardır,
- $\delta < 0$ – xəyali kompleks-qoşma kəsişmə nöqtələri vardır,
- $\delta = 0$ – üst-üstə düşən kəsişmə nöqtələri vardır.

$P = 0,$
- $Q \neq 0$ – bir kəsişmə nöqtəsi vardır,
- $Q = 0, R \neq 0$ – kəsişmə nöqtələri yoxdur,
- $Q = 0, R \neq 0$ – düz xətt ikitərtibli xətt üzərində yerləşir.

4. (6) tənliyindəki P əmsalı yalnız l düz xəttinin $\vec{p}$ yö-nəldici vektorunun koordinatlarından asılıdır və M_0 nöqtəsinin (x_0, y_0) koordinatlarından asılı deyil. Buradan aydın olur ki, əgər $P \neq 0$ olarsa, onda $\vec{p}(p_1, p_2)$ vektoru istiqamətində yönə-lən bütün düz xətlər γ ikitərtibli xəttini iki nöqtədə (həqiqi müxtəlif, üst-üstə düşən və ya xəyali kompleks-qoşma) kəsirlər. Əgər $P = 0$ olarsa, onda ya $l \subset \gamma$, ya da l düz xətti γ ikitərtibli xəttini birdən çox olmayan nöqtədə kəsir.

Əgər sıfırdan fərqli $\vec{p}$ vektoruna paralel olan l düz xətti γ ikitərtibli xətti ilə birdən çox olmayan ortaq nöqtəsi vardırsa və ya l düz xətti γ xəttinin üzərində yerləşirsə, onda deyirlər ki, $\vec{p}$ vektorunun istiqaməti γ ikitərtibli xəttinə nəzərən *asimptotik* istiqamətdir. Bu tərifdən alınır: *sıfırdan fərqli $\vec{p}(p_1, p_2)$ vektoru-nun təyin etdiyi istiqamət yalnız və yalnız*

$$a_{11}p_1^2 + 2a_{12}p_1p_2 + a_{22}p_2^2 = 0 \qquad (7)$$

şərti ödənildikdə γ ikitərtibli xəttinə nəzərən asimptotik istiqamət olur.

(7) düsturundan istifadə etməklə ikitərtibli xəttə nəzərən asimptotik istiqamətləri tapmaq olur.

$a_{22} \neq 0$ olduqda (7) tənliyindən alınır ki, $p_1 \neq 0$ ($\vec{p}$ – sıfırdan fərqli vektor olduğu üçün), ona görə də (7) tənliyinin hər iki tərəfini p_1^2 – na bölüb, $k = \dfrac{p_2}{p_1}$ olduğunu nəzərə alsaq, yaza bilərik:

$$a_{22}k^2 + 2a_{12}k + a_{11} = 0.$$

Bu kvadrat tənliyin həlləri

$$k = \frac{-a_{12} \pm \sqrt{-\Delta}}{a_{22}}, \qquad (8)$$

şəklində tapılır, burada $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$.

$a_{22} = 0$ olduqda (7) tənliyi $a_{11}p_1^2 + 2a_{12}p_1p_2 = 0$ şək-lində yazılır. Bu tənliyi

$$\vec{e}_2(0,1) \text{ və } \vec{p}(-2a_{12}, a_{11}) \qquad (9)$$

vektorlarının koordinatları ödəyirlər.

İkitərtibli γ xəttinə nəzərən neçə asimptotik istiqamətin olduğunu aydınlaşdıraq. Üç halı nəzərdən keçirək.

1) $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$. Bu o deməkdir ki, $a_{22} \neq 0$. (8) düsturundan müəyyən edirik ki, γ xəttinə nəzərən asimptotik istiqamətlər yoxdur.

2) $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0.$ Bu halda γ xəttinə nəzərən iki asimptotik istiqamət vardır. Doğrudan da, $a_{22} \neq 0$ olduqda bu nəticə (8) düsturundan, $a_{22} = 0$ olduqda isə (9)-dan alınır. $a_{22} = 0$ halında $a_{12} \neq 0$ olur və ona görə də $\vec{e}_2(0,1)$ və $\vec{p}(-2a_{12}, a_{11})$ vektorları kollinear olmurlar.

3) $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0.$ Bu halda γ xəttinə nəzərən yalnız bir asimptotik istiqamətl vardır. Doğrudan da, $a_{22} \neq 0$ olduqda bu nəticə (8) düsturundan, $a_{22} = 0$ olduqda isə (9)-dan alınır. İkinci halda $a_{12} = 0$ olur və ona görə də $\vec{e}_2(0,1)$ və $\vec{p}(0, a_{11})$ vektorları kollinear olmaqla eyni bir asimptotik istiqaməti təyin edirlər.

Beləliklə, aşağıdakı teorem doğrudur:

Teorem. *Tutaq ki, ikitərtibli xətt (4) tənliyi ilə verilmişdir və* $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$. *Onda* $\Delta > 0$ *olduqda bu ikitərtibli xəttə nəzərən asimptotik istiqamətlər yoxdur,* $\Delta < 0$ *olduqda iki asimptotik istiqamət vardır,* $\Delta = 0$ *isə bir asimptotik istiqamət vardır.*

Qeyd. Asimptotik istiqamət anlayışı həndəsi anlayışdır (yəni həndəsi fiqurların qarşılıqlı vəziyyətinə görə təyin edilmiş-dir) və ona görə də koordinat sisteminin seçimindən asılı deyil. Buradan isbat etdiyimiz teoremə əsasən alınır ki, $\Delta > 0$, $\Delta < 0$ *və ya* $\Delta = 0$ ***şərtləri koordinat sisteminin seçimindən asılı deyil.***

Ellips, hiperbola və parabolaya nəzərən neçə asimptotik istiqamətin olduğunu aydınlaşdıraq. Tutaq ki, ellips $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ kanonik tənliyi ilə verilmişdir. Bu halda $\Delta = \frac{1}{a^2b^2} > 0$ olduğundan, *ellipsə nəzərən asimptotik istiqamətlər yoxdur.* Analogiyaya görə $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ kanonik tənliyi ilə verilmiş hiperbola üçün $\Delta = -\frac{1}{a^2b^2} < 0$ olduğundan, *hiperbolaya nəzərən iki asimptotik istiqamət vardır* (bu istiqamətlər hiperbolanın asimptotlarının istiqamətləri ilə üst-üstə düşürlər). Eyni qayda göstərmək olur ki, parabola halında $\Delta = 0,$ ona görə də *parabolaya nəzərən yalnız bir asimptotik istiqamət vardır.* Bu nəticələrlə bağlı olaraq, ikitərtibili xətti $\Delta > 0$ olduqda *elliptik tip,* $\Delta < 0$ olduqda *hiperbolik tip,* $\Delta = 0$ olduqda isə *parabolik tip* xətt adlandırırlar.

Mühazirə 14

İkitərtibli xəttin mərkəzi

Əvvəlcə ikitərtibli xəttin vətərinin orta nöqtəsinə dair lemmanı isbat edək.

Lemma.

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0 \qquad (1)$$

tənliyi ilə verilmiş ikitərtibli xəttinə asimptotik istiqamətli olmayan $\vec{p}(p_1, p_2)$ *vektoru verilmişdir.*

$M(x_0, y_0)$ *nöqtəsinin* $\vec{p}$ *vektoruna paralel olan hər hansı vətərin orta nöqtəsi olması üçün zəruri və kafi şərt*

$$F_1(x_0, y_0)p_1 + F_2(x_0, y_0)p_2 = 0 \qquad (2)$$

bərabərliyinin ödənilməsidir.

İsbatı. $M(x_0, y_0)$ nöqtəsindən keçən və $\vec{p}$ vektoruna paralel olan l düz xəttinin parametrik tənliklərini yazaq: $x = p_1t + x_0,\ y = p_2t + y_0$. Tutaq ki, M_1 və $M_2 -$ l düz xəttinin verilmiş xətlə kəsişmə nöqtələridir, t_1 və $t_2 -$bu nöqtələrin parametrləridir. Onda M_1 və M_2 nöqtələrinin

$$M_1(p_1t_1 + x_0, p_2t_1 + y_0),\ M_2(p_1t_2 + x_0, p_2t_2 + y_0)$$

koordinatları vardır. Aşkardır ki, $M(x_0, y_0)$ nöqtəsi yalnız və yalnız $t_1 + t_2 = 0$ şərti ödənildikdə M_1M_2 parçasının orta nöq-təsi olur. Digər tərəfdən, t_1 və t_2 § 12-də verilən

$$Pt^2 + 2Qt + R = 0 \tag{3}$$

kvadrat tənliyinin həlləridir. Viyet teoreminə görə (3) tənliyinin köklərinin cəmi yalnız və yalnız $Q = 0$ olduqda, yəni (2) şərti ödənildikdə sıfra bərabər olur.

2. İkitərtibli xəttin simm[redacted]triya mərkəzi olan C nöqtəsinə onun *mərkəzi* deyilir.

Terem 1. *$C(x_0, y_0)$ nöqtəsinin (1) tənliyi ilə verilmiş ikitərtibli xəttin mərkəzi olması üçün zəruri və kafi şərt x_0, y_0 ədədlər cütünün*

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{12} = 0, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{22} = 0 \end{cases} \tag{4}$$

sisteminin həlli olmasıdır.

İsbatı. Tutaq ki, $C(x_0, y_0) - \gamma$ ikitərtibli xəttinin mərkə-zidir. İsbat edək ki, x_0, y_0 ədədləri (4) sistemini ödəyirlər. C nöqtəsindən, uyğun olaraq, $\vec{p}(p_1, p_2)$ və $\vec{q}(q_1, q_2)$ vektorlarına paralel olan asimptotik olmayan istiqamətli iki vətər keçirək. $C - \gamma$ xəttinin mərkəzi olduğundan, bu nöqtə vətərlərdən hər birinin orta nöqtəsi olar. Vətərin orta nöqtəsinin koordinatlarına dair lemmaya görə

$$\begin{cases} F_1(x_0, y_0)p_1 + F_2(x_0, y_0)p_2 = 0, \\ F_1(x_0, y_0)q_1 + F_2(x_0, y_0)q_2 = 0. \end{cases} \tag{5}$$

$\vec{p}(p_1, p_2)$ və $\vec{q}(q_1, q_2)$ kollinear olmayan vektorlardır. Ona görə də $\begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix} \neq 0.$

Buradan aydın olur ki, (5) bircins xətti tənliklər sisteminin yalnız sıfır həlli vardır: $F_1(x_0, y_0) = 0,$ $F_2(x_0, y_0) = 0,$ yəni C nöqtəsçinin koordinatları (4) sistemini ödəyirlər.

Tərsinə, tutaq ki, $C(x_0, y_0)$ nöqtəsinin koordinatları (4) tənliklər sistemini ödəyirlər; isbat edək ki, $C - \gamma$ xəttinin mərkə-zidir. Koordinat başlanğıcını $C(x_0, y_0)$ nöqtəsinə paralel köçürək və yeni koordinat sistemində γ ikitərtibli xəttinin tənliyini yazaq. Baxılan halda koordinatların çevirmə düsturları $x = X + x_0$, $y = Y + y_0$ şəklindədir. γ xəttinin yeni koordinat sistemində tənliyini yazmaq üçün x və y dəyişənlərinin qiymətlərini (1) tənliyində yerinə yazaq:

$$a_{11}(X + x_0)^2 + 2a_{12}(X + x_0)(Y + y_0) + a_{22}(Y + y_0)^2 +$$
$$+ 2a_{10}(X + x_0) + 2a_{20}(Y + y_0) + a_{00},$$

və ya

$$a_{11}X^2 + 2a_{12}XY + a_{22}Y^2 + 2a'_{10}X + 2a'_{20}Y + a'_{00} = 0, \tag{6}$$

burada

$$a'_{10} = F_1(x_0, y_0), a'_{20} = F_2(x_0, y_0), a'_{00} = F(x_0, y_0).$$

$C(x_0, y_0)$ nöqtəsinin koordinatları (4) sistemini ödədiklərindən, $a'_{10} = 0, a'_{20} = 0,$ ona görə də (6) tənliyi

$$a_{11}X^2 + 2a_{12}XY + a_{22}Y^2 + a'_{00} = 0$$

şəklində yazılır. Bu tənlikdən görünür ki, C nöqtəsi γ xəttinin simmetriya mərkəzidir. Doğrudan da, əgər $M(x, y) \in \gamma$ olarsa, onda $M'(-x, -y) \in \gamma,$ burada $M' - M$ nöqtəsinə γ xəttinə nəzərən simmetrik olan nöqtədir. Beləliklə, $C - \gamma$ xəttinin mərkəzidir.

Nəticə. *Koordinat başlanğıcının (1) tənliyi ilə verilən xəttin mərkəzi olması üçün zəruri və kafi şərt a_{11} [redacted]$_{22} = 0$ bərabərliklə-rinin ödənilməsidir.*

Doğrudan da, $(0,0)$ ədədləri yalnız və yalnız $a_{11} = a_{22} = 0$ olduqda (4) sistemini ödəyirlər. ■

3. Teorem 2 verilmiş ikitərtibli xəttin mərkəzlərinin varlığı ilə bağlı məsələni araşdırmağa imkan verir. Məsələ (4) tənliklər sisteminin tədqiqinə gətirilir.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{10} \\ a_{21} & a_{22} & a_{20} \end{pmatrix} \tag{7}$$

matrislərinə baxaq və bu matrislərin ranqlarını uyğun olaraq, r və R ilə işarə edək. Aşkardır ki, $r \le R.$ Aşağıdakı hallar mümkündür:

1) $r = R = 2.$ Bu halda (4) tənliklər sisteminin yeganə həlli vardır və ona görə də γ xətti bir və yalnız bir mərkəzə malikdir. Belə xassəyə malik olan ikitərtibli xətlərə *mərkəzi ikitərtibli xətlər* deyilir.

2) $r = R = 1.$ Bu halda (4) sisteminin sonsuz sayda həlləri vardır: (4) sisteminin tənliklərindən biri digərinin nəticə-sidir. İkitərtibli xətt mərkəzlər düz xəttinə malikdir. Bu düz xətt (4) sisteminin tənliklərindən biri ilə verilir.

3) $r = 1, R = 2.$ (4) sistemi uyuşmayandır və bununla əlaqədar olaraq, ikitərtibli xəttin mərkəzi yoxdur.

Mərkəzləri olmayan və ya birdən çox mərkəzi olan ikitərtibli xətlərə *qeyri-mərkəzi xətlər* deyilir. Yuxarıdakı mühakimələrdən alınır ki, yalnız və yalnız $\Delta \ne 0$ olduqda ikitər-tibli xətt mərkəzi xəttdir. Beləliklə, *elliptik və hiperbolik tip xətlər mərkəzi xəttlərdir, parabolik tip xətlər isə qeyri-mərkəzi xətlərdir.*

Ellips və hiperbola mərkəzi ikitərtibli xətlərdir ($\Delta \ne 0$ olduğuna görə), ona görə də bu xətlərin yeganə mərkəzi vardır. Ellips və hiperbolanın mərkəzi koordinat başlanğıcıdır. $y^2 = 2px$ kanonik tənliyi ilə verilmiş parabola üçün (7) matrisləri $r = 1, R = 2$ ranqlarına malik olduqlarına görə parabolanın mərkəzi yoxdur.

Mühazirə 15

İkitərtibli xəttə toxunan, onun tənliyi

γ ikitərtibli xətti üzərində yerləşən M_0 nöqtəsi bu xəttin mərkəzi olarsa, onda deyirlər ki, M_0 *məxsusi* nöqtədir, əks halda M_0 nöqtəsinə *adi* nöqtə deyilir.

Əgər ikitərtibli xəttin adi M_0 nöqtəsindən keçən düz xətt ikitərtibli xətti üst-üstə düşən iki nöqtədə kəsirsə və ya onun üzərində yerləşirsə, onda deyirlər ki, düz xətt M_0 nöqtəsində ikitərtibli xəttə *toxunur.* Toxunan düz xəttə dair teoremi isbat edək.

Teorem 2. *İkitərtibli xəttin istənilən adi nöqtəsində bu xəttə bir və yalnız bir toxunan düz xətt vardır. Əgər ikitərtibli xətt (1) ümumi tənliyi ilə verilərsə, onda $M_0(x_0, y_0)$ nöqtəsində toxunanın tənliyi*

$$\begin{aligned}(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{10})x + (a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{20})y + \\ + (a_{10}x_0 + a_{20}y_0 + a_{00}) = 0\end{aligned} \tag{7}$$

və ya

$$F_1(x_0, y_0)x + F_2(x_0, y_0)y + F_0(x_0, y_0) = 0$$

şəklində olar.

İsbatı. Tutaq ki, M_0 nöqtəsindən keçən l düz xətti $x = x_0 + p_1 t,\ y = y_0 + p_2 t$ parametrik tənlikləri ilə verilmişdir. l düz xəttinin verilmiş γ ikitərtibli xətti ilə kəsişmə nöqtələrinin parametrləri (3) tənliyindən təyin olunurlar. $M_0 \in \gamma$ olduğun-dan, bu nöqtənin koordinatları (1) ümumi tənliyini ödəyirlər, yəni $R = F(x_0, y_0) = 0,$ ona görə də baxılan halda (3) tənliyi

$$Pt^2 + 2Qt = 0 \tag{8}$$

şəklində yazılır.

İsbat edək ki, l düz xətti yalnız və yalnız $Q=0$ olduqda γ ikitərtibli xəttinə toxunandır. Doğrudan da, əgər l-toxunan düz xəttdirsə, onda ya (8) tənliyinin üst-üstə düşən iki kökü , ya da sonsuz sayda kökləri vardır. Hər iki halda $Q=0$ şərti ödənilir. Tərsinə, əgər $Q=0$ olarsa, onda (8) tənliyinin ya üst-üstə düşən iki kökü ($P\neq 0$ olduqda), ya da sonsuz sayda kökləri ($P=0$ olduqda) vardır. $Q=0$ bərabərliyinin açıq şəkildə yazılışı (3) şəklindədir. $M_0(x_0,y_0)$ adi nöqtə olduğundan, (3) bərabərli-yindəki $F_1(x_0,y_0), F_2(x_0,y_0)$ əmsallarından heç olmazsa biri sıfırdan fərqlidir. Ona görə də (3) bərabərliyi yeganə $\vec{p}(p_1,p_2)$ istiqamətini təyin edir. Belə bir vektor olaraq,

$$\vec{t}\left(F_2(x_0,y_0), -F_1(x_0,y_0)\right)$$

vektorunu götürmək olar. M_0 nöqtəsindən $\vec{t}$ vektoru istiqamə-tində yönələn bir və yalnız bir düz xətt keçir, ona görə də M_0 nöqtəsində yeganə toxunan düz xətt vardır.

Toxunan düz xətt M_0 nöqtəsi və $\vec{t}$ yönəldici vektoru ilə təyin olunduğuna görə

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & F_2(x_0,y_0) \\ y-y_0 & -F_1(x_0,y_0) \end{vmatrix}=0 \tag{9}$$

tənliyinə malikdir.

$M_0\in\gamma$ olduğundan, § 12-dəki (3) düsturuna əsasən yaza bilərik:

$$F_1(x_0,y_0)x_0+F_2(x_0,y_0)y_0+F_0(x_0,y_0)=0.$$

Buradan

$$F_0(x_0,y_0)=-\left(F_1(x_0,y_0)x_0+F_2(x_0,y_0)y_0\right) \tag{10}$$

şərti alınır. (10) şərti daxilində (9) tənliyi belə yazılar:

$$F_1(x_0,y_0)x+F_2(x_0,y_0)y+F_0(x_0,y_0)=0.$$

Göründüyü kimi, bu tənlik (7) tənliyidir. ■

5. Ellips, hiperbola və parabolanın bütün nöqtələri adi nöqtələrdir, ona görə də bu xətlərin hər bir nöqtəsində bir və yalnız bir toxunan düz xətt vardır. Kanonik tənlikləri ilə verildiklərini nəzərə almaqla ellips, hiperbola və parabolanın toxunan düz xətlərinin tənliklərini yazaq.

1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ *ellipsinə* (x_0,y_0) *nöqtəsində toxunan düz xətt.* Bu halda $a_{11}=\frac{1}{a^2}, a_{22}=\frac{1}{b^2}, a_{00}=-1, a_{10}=a_{20}=a_{00}=0$,

ona görə də (7) tənliyi

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1 \tag{11}$$

şəklində yazılır.

2) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ *hiperbolasına* (x_0,y_0) *nöqtəsində toxunan düz xətt.* Analoji qayda ilə müəyyən edirik ki, hiperbolaya toxu-nan düz xətt

$$\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=1 \tag{12}$$

tənliyinə malikdir.

3) $y^2=2px$ *parabolasına* (x_0,y_0) *nöqtəsində toxunan düz xətt.* Bu halda $a_{22}=0, a_{10}=-p, a_{11}=a_{12}=a_{20}=a_{00}=0,$ ona görə də toxunanın tənliyi

$$yy_0=p(x+x_0) \tag{13}$$

şəklindədir.